

## 建築構造力学 (5)

### 第6回 多自由度系の地震応答解析

#### 6.1 1質点系の地震応答解析の復習

1 質点系の振動モデルに地震加速度が入力したとき、振動モデルの応答変形や応答速度、そして絶対加速度応答の値を計算する方法について考察する。まず、図1には水平剛性  $k$  質量  $m$  の振動モデルを示す。振動モデルを支えている地面が地震によって動き始めると、ニュートンの力学法則によって式(1)が成立する。ここで、柱1本の水平剛性を  $k/2$  とし、水平剛性はその2倍とした。

普通の建物構造物では、減衰装置は設置されていないので減衰係数はゼロであるが、自然界では時間の経過とともに振動は減少していく。そこで、何らかの原因で振動エネルギーが地面に伝達して振動が減衰することをモデル化するために、式(1)に減衰係数  $c$  という定数を加えて、減衰性のある振動モデルを式(2)で表現する。さらに、式(3)の置換を行うと、式(2)は式(4)に変換される。ここで、 $h$  を減衰率あるいは減衰定数と呼ぶ。これに対して、 $c$  を減衰係数と呼ぶ。前者は無次元量(実数)であるが、後者は物理量であり単位がある。

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_G) = -kx(t) \quad (1)$$

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_G) = -c\dot{x}(t) - kx(t) \quad (2)$$

$$c = 2m\omega_0 h: k = m\omega_0^2 \quad (3)$$

$$\ddot{x} + 2\omega_0 h\dot{x} + \omega_0^2 x(t) = -\ddot{x}_G(t) \quad (4)$$

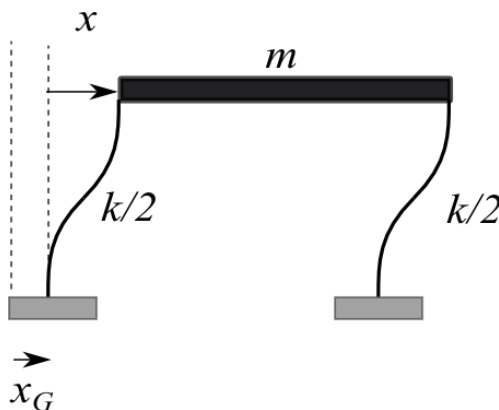


図1 1質点系の地震応答解析のモデル

## 6.2 多層骨組 (多自由度系) の地震応答と固有値解析

建物構造物が 1 質点系に置換できた場合には、1 質点系の地震応答解析によって巨大地震が発生したときに柱梁構造物に作用する地震外力を算定することは可能となった。しかし、建物構造物は 10 階建てや 30 階建て、あるいは 60 階建ての超高層ビルも存在する。このような高層ビルの振動モデルも 1 質点系の振動モデルで良いのだろうか？ 実は、多層骨組みの場合には、多自由度系の振動モデルを作成するのが普通である。多自由度系の振動モデルの最も簡単な解析モデルとして、2 質点系 (2 階建て) の振動モデルを例題として、固有値解析 (実固有値解析) について述べ、モード分解による地震応答解析方法について説明する。

### ・ 2 質点系モデルの概要

2 階建ての柱梁骨組みモデルを図 4 に示す。この骨組みモデルの運動方程式を計算すると式 (5) となる。R 階と 2 階床の重量が集中していると仮定した。式 (5) の右辺は、各層の復元力を表している。復元力は層間の変形を求め、層の水平剛性  $k$  を掛け算した結果である。このモデルでは、減衰効果は全く存在しないと仮定している。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - kx_1 \end{cases} \quad (5)$$

右辺を左辺へ移行する。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \\ m\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) + kx_1 = 0 \end{cases}$$

従って、

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで、式 (5) の定常解として式 (6) を仮定する。式 (6) を式 (5) に代入すると、式 (7) を得る。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \sin \omega t ; \quad \begin{pmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \sin \omega t \quad (6)$$

$$\left[ \begin{pmatrix} -m\omega^2 & 0 \\ 0 & -m\omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \sin \omega t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

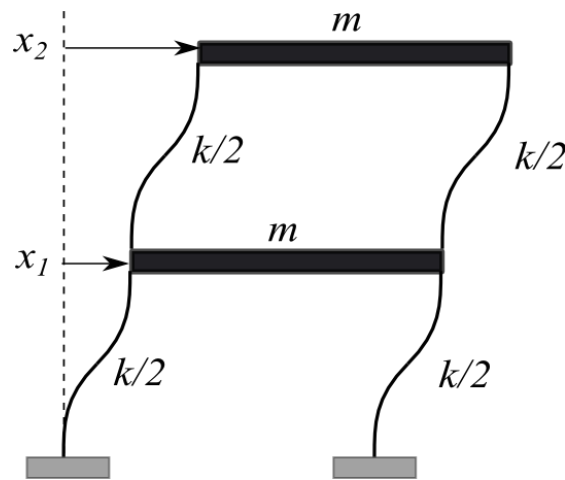


図2 2層建物の振動モデル

式(7)の両辺を $m\omega_0^2 \sin \omega t$  で除し、式(8)に変形することができる。式(8)は固有値問題である。よって、固有方程式は、式(9)で与えられる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-f^2 & -1 \\ -1 & 2-f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$(1-f^2)(2-f^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow f^4 - 3f^2 + 1 = 0 \quad (9)$$

従って、固有振動数は次式となる。

$$f^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (10)$$

1次固有振動数と2次固有振動数は、式(11)となる。それぞれの、固有ベクトルは、式(12)で与えられる。

$$f_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0.618 \quad ; \quad f_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.620 \quad (11)$$

$$1 \text{ 次モード} ; \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.618 \end{pmatrix} ; \quad 2 \text{ 次モード} : \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ -1.618 \end{pmatrix} \quad (12)$$

モードベクトルは、比率は重量であるが絶対値は任意である。このため、2 質点系の変位応答の時刻歴を計算すると、 $x_1$  も  $x_2$  も相似形であるが、絶対値が異なる時刻歴波形が得られる。ところが、1 質点系の同じ地震動記録に対する地震応答解析結果は、地震動の大きさが決まれば物理的に考えて、応答変位が任意の大きさということはない。

固有値解析では、式(5)の右辺がゼロであるから、固有ベクトルは任意の大きさとなったのである。もしも、外力が与えられていれば、1 質点系の地震応答時刻歴の解析結果と比較することによって、R 階の地震応答結果が 1 質点系の地震応答結果と比べて何倍に拡大するのかを解析することができる。式(5)の代わりに、式(13)を解析することとなる。

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{x}_G(t) \quad (13)$$

1 質点系の地震応答の結果と比較したときの、多自由度系における最上階の地震応答解析結果の倍率を「刺激係数」と呼ぶ。モードベクトルの最上階の値を 1.0 に固定し、刺激係数を  $\beta$  とする。1 次モードと 2 次モードの刺激係数と刺激関数は次式となる。

$$\beta_1 = 1.171; \beta_1 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.171 \\ 0.724 \end{pmatrix} \quad ; \quad \beta_2 = 0.171; \beta_2 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.171 \\ 0.277 \end{pmatrix} \quad (14)$$

モード分解すると、2 質点系の地震応答計算はそれぞれのモードごとに計算することになる。

$$\ddot{u}_1 + 2\omega_1 h \dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1(t) = -\beta_1 \ddot{x}_G(t) \quad (15)$$

$$\ddot{u}_2 + 2\omega_2 h \dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2(t) = -\beta_2 \ddot{x}_G(t) \quad (16)$$

最終的には、2 層の時刻歴応答波形は次式となる。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.618 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.618 \end{pmatrix} u_2(t) \quad (17)$$

モード分解したときの有効質量は、次式で算定できる。

$$m e_1 = (\beta_1)^2 (u_2 \quad u_1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = 1.895m \quad (18)$$

$$m e_2 = (\beta_2)^2 (u_2 \quad u_1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = 0.105m \quad (19)$$

従って、地震応答の総入力エネルギーをモードごとに分解すると、1次モードの入力エネルギーが全入力エネルギーのほぼ95%を占めていることが分かる。また、全モードの入力エネルギーを合計すると、有効質量の総和は建物の全重量(質量)に等しくなる。このように、高層建物の場合でも、どのように自由度が多くなっても、総入力エネルギーは総重量と地震のエネルギー応答スペクトルから推定することができるのである。

### 6.3 エネルギー応答スペクトルの1質点置換

多自由度系の地震応答では、1次固有周期の他に2次あるいはもっと高次の固有周期に対応した振動が発生する点である。超高層建物では2次の振動モードが重要であると指摘されることが多い。しかし、耐震設計上は入力エネルギーが最も大きな指標である。そこで、2次モードの入力エネルギーが1次モードの入力エネルギーに比較して、どの程度の影響があるかを調べることは意味のあることである。前節にて、既にモード分解の方法を学習した。そこで、地震入力エネルギーをモードごとに分解してみる。その結果は、次式となる。

$$\frac{1}{2} m (V_E)^2 = \frac{1}{2} m_1 (V_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (V_3)^2 \dots \quad (20)$$

ところが、地震のエネルギースペクトルの形状は図4に示すように長周期領域では、振動数によらずに一定の値となることが多い。従って、式(20)は式(21)に等価である。

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \dots) (V_E)^2 = \frac{1}{2} m (V_E)^2 \quad (21)$$

結局、多自由度系の地震総入力エネルギーは、1質点系の地震総入力エネルギーにほとんど等しいことが分かる。高層建物の地震時の入力エネルギーが、損傷集中やねじれ応答によっても変化せず、多自由度系を考慮しても変化しないことがわかると、塑性率や累積塑性変形倍率を多自由度系に拡張するには、どのような指導原理が妥当かということが議論されるようになった。

第1回目の講義で話したように、終局耐力の外力分布は骨組みの全塑性モーメントの分布によって影響を受ける。従って、多層骨組みの場合にも、事前に弾塑性の履歴曲線をモデル化し、地震動入力を徐々に大きくしていき、時刻歴応答を丹念に計算する以外に、損傷を均等に分布させる層せん断力分布を求めることはできない。

この問題、つまり、建物の総せん断力分布を最適化するには、どのようなプロセスが妥当かという問題設定に際しても、2つのアプローチが議論された。すなわち、どの層の塑性率も同じになるような層せん断力分布（降伏せん断力の最適分布）と、どの層の累積塑性変形倍率も等しくなるような最適降伏層せん断力分布の2つである。この問題にも多くの研究者が異なる立場から多くの数値解析結果を発表した。結局、どちらの方法でも、最適降伏せん断力分布はほとんど同じ曲線となった。

さらに、得られた非弾性応答の解析結果は、弾性のモード解析によって得られた1次モードのモード系とほぼ一致する結果である。これが、建築基準法で定められた  $A_i$  分布と呼ばれる設計用地震荷重の総せん断力分布の計算式である。

建築基準法では、 $A_i$  分布を次のように定義している。1995年1月17日の阪神淡路大震災の時、神戸の三宮では多くの建物の中間層が崩壊した。つまり、どこか弱い階の柱だけが集中的に損傷を受けて崩壊したのである。実は、この地震が起きる前から、損傷集中による中間層の崩壊については予想されていたのである。だからこそ、 $A_i$  分布という設計用層せん断力の最適分布が求められ、損傷集中を防ぎ建築物の損傷崩壊を防ぐ建築基準法の改正が1981年に行われていたのである。しかし、1981年よりも以前に設計され施工された建物も数多く現存している。そのため、損傷崩壊による建物の崩壊が三宮では多数発生したのである。

保有耐力設計法では、 $A_i$  分布の他にも剛性率という規定があり、剛性が階ごとに大きく変動することを規制している。もしも、上下方向の層剛性が大きく変動すると損傷集中することが分かっているからである。また、層の降伏荷重が  $A_i$  分布から大きくずれていると、弱い層に損傷が集中することも既に明らかとなっている。学問的には、判明していることでも、それを具体化した町が生まれ変わるのには、少なくとも50年以上は経過しなければならないだろう。これが、耐震工学の難しい点である。

地震力の算定に用いられる  $A_i$  分布は以下の通り。

$$Q_i = R_t A_i C_o W_i \quad (22)$$

$$A_i = 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} - \alpha_i \right) \frac{2T}{1 + 3T} \quad ; \quad \alpha_i = \frac{W_i}{W} \quad (23)$$

$W$  は、建物総重量、 $W_i$  は、各階の重量、 $T$  は、1次固有周期である。ベースシア係数は  $C_o$ 、 $R_t$  は振動特性係数（絶対加速度応答スペクトル）である。許容応力度設計法とは異なり、地震の総せん断力係数は上層階に行くほど大きくなるように設定されている。これは、振動モード形が上層階ほど大きくなるを反映したものである。