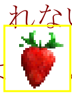
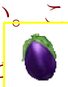
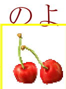
固体力学特論

（第　１　回）

武蔵工業大学工学部建築学科

西村研究室

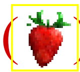
◇　八百屋空間（3 次元）と値段関数

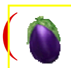
　われわれは、八百屋にいる。この八百屋ちょっと変わっている。なぜなら、3 種類の果物しか売ってくれない。こうのような八百屋を、三次元空間の八百屋という。ところで、3 つの果物とはととである。任意の個数の果物を取り出して、籠に入れる。次に、レジに行き、買い物をする。しかし、君は、考える。

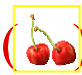
　お財布の中身である。イチゴは一ついくらか。チェリーはいくらか。そこで、この八百屋の壁に貼ってある価格表を見る。そこには、こんな表示がある。

くだもの （定義域）	値段(1 個につき) （値域：実数）
	¥ 10
	¥ 20
	¥ 30

　このように、果物にその値段（実数）を対応させることを、写像と呼ぶ。この写像のことをわれわれは、$\boldsymbol{u}$ と名づける。定義域が実数で、値域も実数の写像は、関数と呼ばれる。ここでは、$\boldsymbol{u}$ は、まだ関数ではない。

$\boldsymbol{u}$ () = 10

$\boldsymbol{u}$ () = 20

$\boldsymbol{u}$ () = 30

　イチゴは 10 円で、ナスビは 20 円で、チェリーは 30 円である。このように、青果物に値段（実数）を対応させる $\boldsymbol{u}$ について調べることにする。この世界では、たった 3 つの青果物から成り立っているので、3 次元空間と呼ぶ。

◇成分表示

　ところで、$\boldsymbol{u}$ は、次のように表現することもできる。なぜなら、$\boldsymbol{u}$ は単なる値段表と同じだからである。

$$\boldsymbol{u} = (10,20,30)$$

　このような表記方法を実数による成分表示という。また、次のように表示することもある。これは、いわば値段表の代わりである。

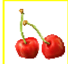
$$u_1 = 10$$
$$u_2 = 20$$
$$u_3 = 30$$

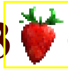
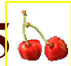
　ここまでくると、我々は、ふと思い出す。ベクトルの成分表示である。$\boldsymbol{u}$ とベクトルは、ほとんど同じである。そこで、ベクトルの定義を次のようにすれば、$\boldsymbol{u}$ そのものが、ベクトルの一つであることを認めてもらえるだろう。

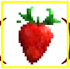
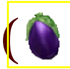
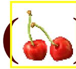
「ベクトルとは、定義域内の要素に、特定の実数を対応させる写像のことである。」

　これが、ベクトルの前半戦の定義である。
　ここまで話を聞いて、君は、胡散臭く思ったことであろう。だって、イチゴやナスビが数学の対象になるわけがないだろう。その通りだ。だから、何とかして、定義域にあるイチゴやナスビやチェリーを、数学の対象としたい。どうすればいいのかな。
これが、次の問題である。

◇ベクトルの線形性

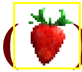
　ベクトルの定義域は、野菜と果物である。これは、数学の対象として実に変だ。しかし、暫くは絵文字で扱うことにしよう。それしか今のところ方法がない。ところで、ベクトルには、次の関係がある。つまり、君は、を３つ、を２つ、 を５つ買うことにした。全部でいくらか。それは、次式で表される。

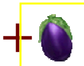
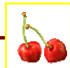
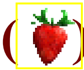
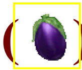
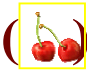
u (3+2+5) =

3u ()+2u ()+5u ()

$$= 3u_1+2u_2+5u_3 = 30+40+150=220$$

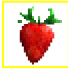
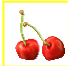
　ということになる。つまり、君は 220 円払わないといけない。一般的には、次のような２つの性質がある。右辺も左辺も実数（金額）である。だから、等号で結ぶことができる。

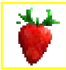
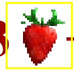
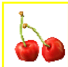
u (k ) = $k \cdot u$ ()

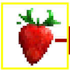
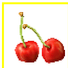
u( + +) = u() +u() +u()

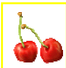
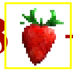
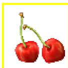
　この性質のことを、線形性という。u、あるいは、ベクトルには線形性があることが分かった。

◇基底ベクトル。

ところで、君は先ほど、を３つ、を２つ、を５つ買うことにした。山盛りの籠には 3 種類の青果物がごちゃごちゃに混ざっているとする。八百屋さんは、ごちゃごちゃでは計算し難いので、より分けることにした。籠の中からイチゴの個数（実数）を対応させる写像を、イチゴ基底ベクトルと呼ぶ。また、籠の中からナスビの個数（実数）を対応させる関数を、ナスビ基底ベクトルとよぶ。同様に、チェリー基底ベクトルも定義できる。なぜ、これをベクトルと呼べるのか。定義を見てほしい。

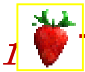
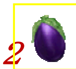
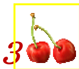
 (3+2 +5) = 3

 (3+2 +5) = 2

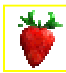
 (3+2 +5) = 5

このように、イチゴ、ナスビ、チェリーを定義域とし、実数を値域とする写像であれば、それは、ベクトルである。各基底ベクトルは、線形性も満足する。

ところで、この基底ベクトルを使うと、値段ベクトルは次のように表すことができる。だって、イチゴの値段はu_1で、ナスビはu_2で、チェリーはu_3だから当然でしょ。

$u = u_1$$+ u_2$$+ u_3$

この八百屋で買い物をする限り、どんな買い物をしても、(どんなベクトルも)、イチゴとナスビとチェリーの実数倍を足し算した形で表すことができる。これで、関数の実数倍とはどんなことか、理解できたと思う。単位が違うのである。　イチゴの個数を数える関数（ベクトル）の単位は個である。値段表は 1 個あたりの値段である。掛け算すれば、当然、単位は値段である。ここでは、右辺も左辺も実数ではないことに注意してほしい。左辺は、ベクトルである。右辺は基底ベクトルの実数倍を足し算したものである。このようにして、ベクトル空間内での足し算が定義できたのである。

よく考えてね。イチゴそのものと、イチゴの個数を数えるベクトルを同一視したわけです。君たちは、自分自身と自分の名前を同じものと考えているでしょう。ここでも、同じことをしました。これからは、イチゴそのものの代わりにイチゴベクトルを考えます。従って、イチゴ 50 個は、イチゴベクトル 50 個と等しいと考えます。こうするこ

とで、イチゴという抽象的なものに数学的な定義を与えることができたのです。つまり、イチゴは、イチゴベクトルと一対一の対応関係があります。一対一だから、間違いがありません。同じ物だと思ってください。さらに基底ベクトルには次のような性質があります。

🍓(🍓) = 1　　（お皿に一個）

🍆(🍆) = 1

🍒(🍒) = 1

それ以外の組み合わせについては、全て零となる。即ち、

🍓(🍆) = 🍓(🍒) = 0　（お皿に無い）

🍆(🍓) = 🍆(🍒) = 0　（お皿に無い）

🍒(🍓) = 🍒(🍆) = 0　（お皿に無い）

山盛りの籠の中から、自分と同じ種類の要素を取り出して個数を数えるのだから、当然である。従って、基底ベクトルにも線形性が成り立つことが分かる。例えば、山盛りのお皿には、イチゴが 3 個、ナスビが 2 個、チェリーが 5 個入っていたとする。この中にあるイチゴの個数は、次のように計算できる。

🍓(3🍓+2🍆+5🍒) =

= 3🍓(🍓) + 2🍓(🍆) + 5🍓(🍒)

= 3x1 + 2x0 + 5x0 = 3

とうとう、イチゴは数学の対象となった。個数を数えるという単純な行為を通して、イチゴは、ベクトルになったのである。つまり、値段ベクトルの定義域は、ベクトルであり、値域は実数となった。この点は、とても重要である。まるで、無から有を生じたようだ。

◇　線形汎関数

　定義域を関数とし、値域を実数とする写像のことを、汎関数という。我々がここで考えている値段ベクトルは、イチゴとナスビとチェリーという単位ベクトルの線形和で表される。

　結局、ベクトルとは、ベクトルを定義域とし、値域を実数とする線形汎関数であると定義できる。