固体力学特論

（第　２　回）

武蔵工業大学工学部建築学科

西村研究室

◇ベクトル

任意のベクトル$\boldsymbol{u}$は単位ベクトルの線形和で表される。

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{e}_i$$

ここで、3 次元空間の単位ベクトルを$\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3$とした。

同様にベクトル$\boldsymbol{v}$も、次のように線形和で表される。

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{e}_i$$

単位ベクトル$\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3$は、次の性質を満たす、汎関数である。（自分の個数を数える関数だから。イチゴベクトルを思い出そう。）

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

この記号は若干複雑なので、次式で置き換えることとする。この記号のことを、クロネッカーδと呼ぶ。

$$\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

もしも、単位ベクトルが最初に与えられた空間で考えるならば、ベクトルは成分（実数）のみでも定義できる（1 対 1 対応だから）。ベクトルの成分は次式で与えられる。（値段関数を思い出そう。）

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{e}_i) = u_i (i = 1,2,3)$$

例えば、$i = 1$については次式で計算できる。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{e}_1) = (u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_1) = u_1\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{e}_1) = u_1$$

２，３の成分についても同じである。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{e}_2) = u_2 \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{e}_3) = u_3$$

これをベクトルの成分表示と呼ぶ。

◆テンソルの定義

２つのベクトル$\boldsymbol{u}$と$\boldsymbol{v}$に対して１つの実数を対応させる線形写像Ｔを２階のテンソルと呼ぶ。

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=R$$

どのような計算で$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$に対して、１つのＲを対応させるかを考える。線形性を満足させるためには、次式を満足する必要がある。

$$R=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i,\sum_{j=1}^{3}u_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{3}\ u_iv_j\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$$

全ての成分を書き出すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}R=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})&=\boldsymbol{T}(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3,v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3)\\&=u_1v_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+u_1v_2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+u_1v_3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)\\&+u_2v_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)+u_2v_2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)+u_2v_3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\\&+u_3v_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)+u_3v_2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)+u_3v_3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

ベクトル$\boldsymbol{u}$の成分表示は、単位ベクトルが対応する実数、例えば、$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{e}_i)=u_i$によって成分を決定した。線形汎関数 Ｔ の場合にも、成分表示を同じ考え方で行えば、次式で成分表示を定義できる。

$$T_{ij}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$$

従って、次式を得る。

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{j=1}^{3}\ \sum_{i=1}^{3}\ u_iv_j\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\sum_{j=1}^{3}\ \sum_{i=1}^{3}\ T_{ij}u_iv_j$$

クドイヨウダが、もう一度成分を書き下すと次式となる。

$$\begin{aligned}R=\boldsymbol{T}&(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\&=u_1v_1T_{11}+u_1v_2T_{12}+u_1v_3T_{13}\\&+u_2v_1T_{21}+u_2v_2T_{22}+u_2v_3T_{23}\\&+u_3v_1T_{31}+u_3v_2T_{32}+u_3v_3T_{33}\end{aligned}$$

以上により、計算は実行できるようにはなったが、ベクトルの場合には一々定義域のベクトルを代入しなくても、ベクトル表示を次のように単位ベクトルの線形和で表現できた。

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i = u_1 \boldsymbol{e}_1 + u_2 \boldsymbol{e}_2 + u_3 \boldsymbol{e}_3$$

テンソルも同じような表現があると便利である。そこで、単位テンソルというべきものがあったと仮定して、次のようにテンソル T を表し、単位テンソルの線形和で表現する。

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

成分表示と上記の表現が矛盾無く成立するように、単位テンソルを定義すると、次式を得る。両者は等しくなければならない。

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} u_i v_k \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_k) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} T_{ij} u_i v_j$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

従って、

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u_i v_j$$

結局、

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{v}) = u_i v_j$$

以上が単位テンソルの定義式である。

◇　テンソルの行列表示

ベクトルの成分表示は、列ベクトルなどを用いて次式のように表現できた。

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

テンソルも成分表示ができないだろうか。テンソルを行列によって成分表示すると次式を得る。

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

この成分表示が、今までのテンソルの定義と矛盾しないように計算を定義することとする。

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} T_{ij} u_i v_j = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

さらに、単位テンソルについても矛盾が生じることが無いように計算を定義すると次のような定義が得られる。

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad ....$$

これが、テンソル（2 階のテンソルという）の行列による表現である。

◇ 再度、クロネッカーのδ

2 階のテンソルは、正方行列と 1 対 1 に対応することが分かった。正方行列は 1 次変換と 1 対 1 に対応している。ベクトル $\boldsymbol{u}$ をベクトル $\boldsymbol{u}$ に変換する 1 次変換は特別であり、次式で定義する。

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$$

この 1 次変換を行列の成分で表示すると次式を得る。

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

さらに、成分で表示すると次式を得る。

$$\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

この表記をクロネッカーのδと呼ぶ。定義から、クロネッカーのデルタは単位ベクトル同士の内積と等しい。

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

定義によって、次式が成り立つ。

$$\sum_i \delta_{i\,i} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

例えば、次の計算はクロネッカーのδによって全て成分による表示が可能となる。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}) = \sum_i \sum_j u_i \boldsymbol{e}_i (v_j \boldsymbol{e}_j) = \sum_i \sum_j u_i v_j \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j) = \sum_i \sum_j \delta_{i\,j} u_i v_j = \sum_i u_i v_i$$

◇2 階のテンソルの性質

2 階のテンソルで、成分が次の条件を満足する場合、対称テンソルと呼ぶ。

$$S_{i\,j} = S_{j\,i}$$

これを、行列で表すと次式となる。

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

2 階のテンソルで、成分が次の条件を満足する場合、交代テンソルと呼ぶ。

$$R_{i\,j} = -R_{j\,i}$$

これを、行列で表現すると次式となる。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & R_{12} & -R_{13} \\ -R_{12} & 0 & R_{23} \\ R_{13} & -R_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

2 階の行列は一般的に、ある対称行列とある交代行列の和で表現できる。

$$T_{i\,j} = R_{i\,j} + S_{i\,j}$$

実際、次式を満足する S と R が常に存在しそれぞれ対称行列と交代行列の条件を満たす。

$$S_{i\,j} = \frac{T_{i\,j} + T_{j\,i}}{2} \qquad R_{i\,j} = \frac{T_{i\,j} - T_{j\,i}}{2}$$

◇ 3 階のテンソル

3 つのベクトル、$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ に対して、1 つの実数を対応させる 1 次変換を 3 階のテンソルと定義する。2 階のテンソルに倣って、次式を定義する。

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{T}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i,\sum_{j=1}^{3}v_j\boldsymbol{e}_j,\sum_{k=1}^{3}w_k\boldsymbol{e}_k\right)=\sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{3}\ \sum_{k=1}^{3}\ u_iv_jw_k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)$$

3 つの和を取る記号は、何時も現れるが同じ添え字の i,j,k などについて和を取ればよいので、今後はこの記号 Σ を省略する。従って、

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=u_iv_jw_k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)$$

2 階のテンソルの時と同じように、3 階のテンソルについても単位テンソルが定義できると便利である。何故なら、定義域のベクトルを選ばなくても良いからである。そこで、3 階の単位テンソルを次式で定義すると一般的な 3 階のテンソルは、単位テンソルの線形和で表される。

$$\boldsymbol{T}=T_{i\,j\,k}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$

ここで、3 階の単位テンソルは、2 階の単位テンソルと同じように定義できる。

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{w})=u_iv_jw_k$$

3 階のテンソルで、最も理解しやすいものは、3 つのベクトルが張る平行 6 面体の体積である。この体積は、行列式の計算式と同じであることは良く知られている。

$$\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}=u_1v_2w_3+v_1w_2u_3+w_1u_2v_3-w_1v_2u_3-u_1v_3w_2-v_1u_2w_3$$

そこで、行列式テンソルの成分を次式で定義する。

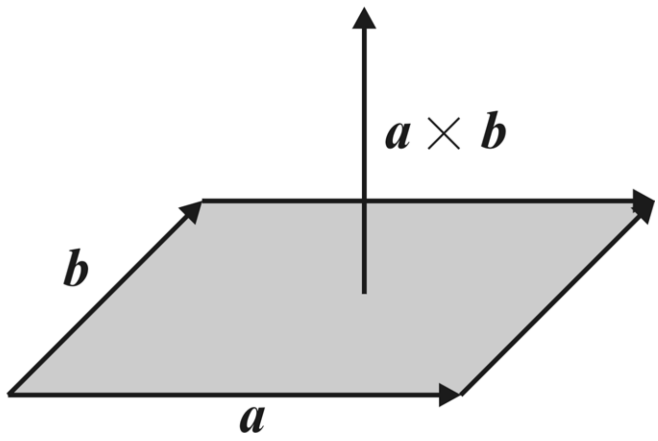
$$\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\varepsilon_{i\,j\,k}u_iv_jw_k$$

従って、行列式テンソルの成分は次式で表される。

$$\varepsilon_{i\,j\,k}=\begin{cases}1 & i,j,k\text{が偶順列}\\ -1 & i,j,k\text{が奇順列}\\ 0\ i=j,j=k,k=i\text{の場合}\end{cases}$$

このテンソルのことをエディントンのイプシロンと呼ぶ。ε_{ijk} は単位ベクトルの張る正六面体の向き付けられた体積と考えることができる。だから、必ず体積の絶対値は１となる。エディントンのイプシロンの値も１か－１のどちらかである。マイナスとなるのは、左手系の場合である。

$$\det(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \varepsilon_{ijk}$$



◇　エディントンのεの性質

さらに、エディントンのイプシロンには次の性質がある。これを証明せよ。（宿題）

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$