固体力学特論

（第　３　回）

武蔵工業大学工学部建築学科

西村研究室

○　位置ベクトル

宇宙に原点が存在するとする。このとき、原点から、考えている点 P までのベクトルを位置ベクトルと定義する。

$$x = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

ここで、3 次元空間の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3$ とした。

○線素ベクトル

次に、単位ベクトルを次式で定義する。

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3$$

ここで、

$$(\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2 = 1$$

さらに、線素ベクトルを次式で定義する。線素ベクトルの長さは、ds であり、方向は $\boldsymbol{\lambda}$ で与えられる。

$$d\boldsymbol{x} = dx_1\boldsymbol{e}_1 + dx_2\boldsymbol{e}_2 + dx_3\boldsymbol{e}_3 = ds\boldsymbol{\lambda}$$

従って、

$$\frac{dx_1}{ds} = \lambda_1 \quad \frac{dx_2}{ds} = \lambda_2 \quad \frac{dx_3}{ds} = \lambda_3$$

○　スカラー場

空間に温度が分布している場合を考える。点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。このとき、点 P の温度は $T(\boldsymbol{x})$ で定義される。このとき点 P の近傍、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}ds$ の温度を考える。

通常の微分の定義に従えば、

$$\frac{dT}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}ds) - T(\boldsymbol{x})}{ds}$$

これを次のように表現する。

$$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}ds) = T(\boldsymbol{x}) + dT = T(\boldsymbol{x}) + d(T)$$

この温度変化のことを、全微分といい、次式で計算できる。(定義する。)

$$dT = d(T) = dx_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)(T)$$

従って、全微分の作用素 $d(*)$ は、次式で定義される。

$$d(*) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)(*)$$

例 1

空間内の位置 x における温度 $T(x)$ が次式で与えられているとき、温度の全微分は次式で与えられる。

$$T(x) = \sin(x_1) + x_2 + \cos(x_3)$$

$$dT = dx_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = dx_1 \cos(x_1) + dx_2 - dx_3 \sin(x_3)$$

ところで、温度変化 dT は実数であり、変化する方向 $\boldsymbol{\lambda} ds = \boldsymbol{dx}$ はベクトルである。ベクトルに実数を対応させる線形汎関数のことを、ベクトルと定義した。この線形汎関数のことを勾配ベクトル(微分ベクトル)とよび、∇ と書く。

このとき、線素ベクトル $\boldsymbol{dx}$ に全微分 dT を対応させるベクトルが勾配ベクトル ∇ である。

$$\boldsymbol{dx} \overset{\nabla}{\rightarrow} \boldsymbol{dT}$$

従って、

$$\begin{aligned} dT &= \nabla(d\boldsymbol{x}) \\ &= \nabla(dx_1\boldsymbol{e_1} + dx_2\boldsymbol{e}_2 + dx_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= dx_1\nabla(e_1) + dx_2\nabla(e_2) + dx_3\nabla(e_3) \\ &= dx_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{aligned}$$

成分を比較すると、微分ベクトル ∇ の成分が求まる。

$$\nabla(T) = \left(\boldsymbol{e_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right)(T)$$

以上をまとめると以下の関係が得られる。

全微分： $dT = d(T) = dx_1 \dfrac{\partial T}{\partial x_1} + dx_2 \dfrac{\partial T}{\partial x_2} + dx_3 \dfrac{\partial T}{\partial x_3} = \left(dx_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3} \right)(T)$

方向微分： $\nabla(T) = \left(\boldsymbol{e_1} \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e_2} \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e_3} \dfrac{\partial}{\partial x_3} \right)(T)$

ベクトルの表示方法を振り返ると。

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = \sum u_i\boldsymbol{e}_i \ = u_i\boldsymbol{e}_i$$

テンソルの表示方法を振り返ると。

$$E = E_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + E_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \ldots = \sum E_{ij}\boldsymbol{e}_i \ \otimes \boldsymbol{e}_j = E_{ij}\boldsymbol{e}_i \ \otimes \boldsymbol{e}_j$$

そこで、全微分をベクトルの成分で表示すると次式を得る。

$$dT = \sum_i \ (dx_i)(\nabla_i T) = (dx_i)(\nabla_i T)$$

一方、方向微分をベクトルの成分で表示すると次式を得る。

$$\nabla T = \nabla_i(T) = \frac{\partial}{\partial x_i}(T) = (\nabla_i T)\boldsymbol{e}_i$$

結局、全微分と方向微分を成分で表示すると次式を得る。

$$dT = \nabla_i T(dx_i)$$

○　ベクトル場

空間にベクトルが分布しているとする。例えば、川の流れは、ベクトル場である。点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。このとき、点 P の流速は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ で定義される。このとき点 P の近傍、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda} ds$ の流速 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda} ds)$ を考える。

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda} ds)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})+d\boldsymbol{v}=v(\boldsymbol{x})+d(\boldsymbol{v})$$

成分で表示すると

$$\boldsymbol{v}=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3=v_i\boldsymbol{e}_i$$

流速変化は、

$$d\boldsymbol{v}=(dv_1)\boldsymbol{e}_1+(dv_2)\boldsymbol{e}_2+(dv_3)\boldsymbol{e}_3=(dv_i)\boldsymbol{e}_i$$

このとき、線素ベクトル $d\boldsymbol{x}$ に全微分 $d\boldsymbol{v}$ を対応させる行列（一次変換）が勾配行列 $\nabla(v)$ と定義する。

$$d\boldsymbol{x}\xrightarrow{\nabla(\boldsymbol{v})}d\boldsymbol{v}$$

ところで、全微分の関係から次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} dv_1 & dv_2 & dv_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

添え字で表現すると、

$$dv_i=dx_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

ベクトル場においても、全微分と方向微分をスカラー場と同じ形式で表現したい。

$$全微分：\boldsymbol{dv} = dv_j = dx_i\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = (dx_i)(\nabla_i v_j)\boldsymbol{e}_j$$

$$方向微分：\nabla(\boldsymbol{v}) = \nabla_i(v_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(v_j) = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = (\nabla_i v_j)(e_i \otimes e_j)$$

実際に、ベクトル場の全微分と方向微分の関係は次式となる。

$$dv_i = (\nabla_k v_i)(dx_k)$$

○ テンソル場

もしも、空間内にベクトルではなく一次変換が分布していたとすると、テンソル場が定義できる。このとき、テンソル場の全微分と方向微分も次式で定義できる。

まず、テンソル場Tは次式となる。

$$T(\boldsymbol{x}) = T_{ij}(x) = T_{ij}(e_i \otimes e_j)(x)$$

テンソル場の全微分は、

$$dT(\boldsymbol{x}) = (dx_k)(\nabla_k T_{ij})(x) = (dx_k)(\nabla_k T_{ij})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(x)$$

テンソル場の方向微分は、

$$\begin{aligned}\nabla T(\boldsymbol{x}) &= \nabla_k T_{ij}(x) = \nabla_k(T_{ij} e_i \otimes e_j)(x)\\ &= (\nabla_k T_{ij})(e_i \otimes e_j)(x)\end{aligned}$$

従って、両者の関係は、

$$dT_{ij} = (\nabla_k T_{ij})(d\boldsymbol{x}_k)$$