固体力学特論

（第　４　回）

武蔵工業大学工学部建築学科

西村研究室

○　変位テンソル

点Pの位置ベクトルを$\boldsymbol{x}$とする。点Pを始点とし、点P^*を終点とするベクトル$\boldsymbol{v}$が存在している。点$P(\boldsymbol{x})$の近傍に点$Q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx})$がある。点$Q$を始点とし点$Q^*$を終点とするベクトルは$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{dv}$となる。ここで、$\boldsymbol{dx}$に$\boldsymbol{dv}$を対応させる一次変換を微分$D_{i\,j}$と呼ぶ。

$$D = D_{i\,j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} & \dfrac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

前回の結果を思い出すと、

$$\boldsymbol{dv}_i = \sum_i (dx_i)(\nabla_i v_j)$$

または、

$$\boldsymbol{dv} = D(\boldsymbol{dx})$$

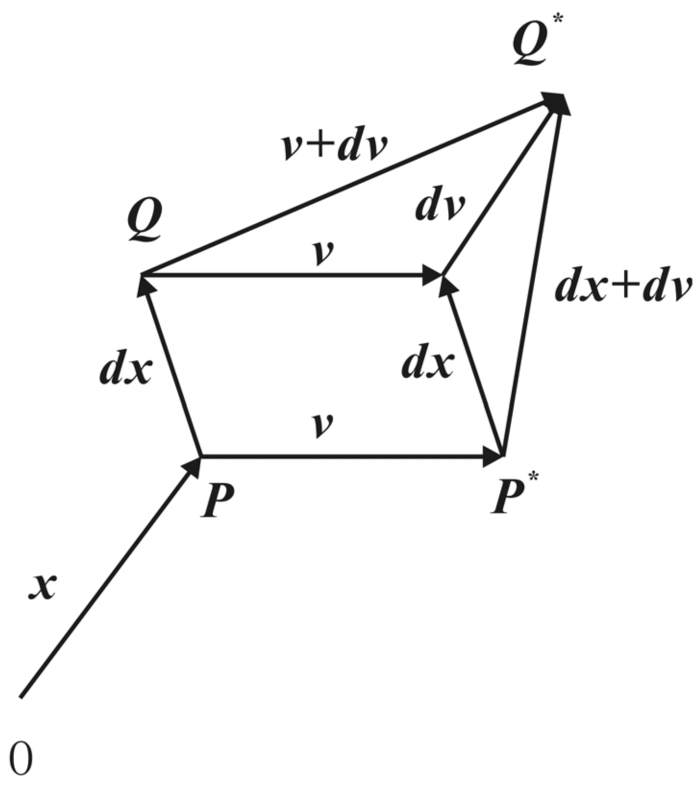


図１　変位テンソルの定義

一般に２階のテンソルは、対称成分と交代成分に分解することができる。

$$D_{ij} = E_{ij} + \phi_{ij}$$

変位テンソルの成分のうち対称成分をひずみテンソル E_{ij} とよび、交代成分を渦度テンソル ϕ_{ij} と呼ぶ。

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji})$$
$$\phi_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji})$$

従って、次の関係が成り立つ。

$$D(d\boldsymbol{x}) = E(d\boldsymbol{x}) + \phi(d\boldsymbol{x})$$

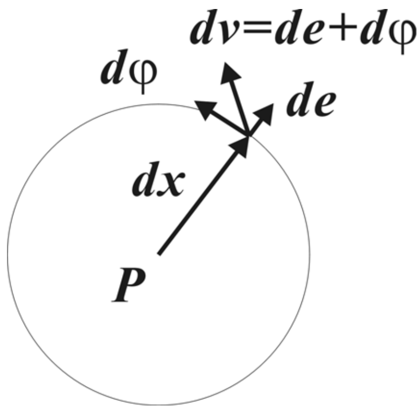
このとき、変位ベクトルの全微分 $\boldsymbol{dv}$ は、拡大ベクトルと回転ベクトルに分解できる（筈である。）

$$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{e} + d\varphi$$

ここで、

$$d\boldsymbol{e} = E(d\boldsymbol{x})$$
$$d\varphi = \phi(d\boldsymbol{x})$$

となることを示そう。まず、回転ベクトル $\boldsymbol{d\varphi}$ の物理的な意味を考察する。



○回転（Rotation）

外積ベクトルの復習をすると、

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

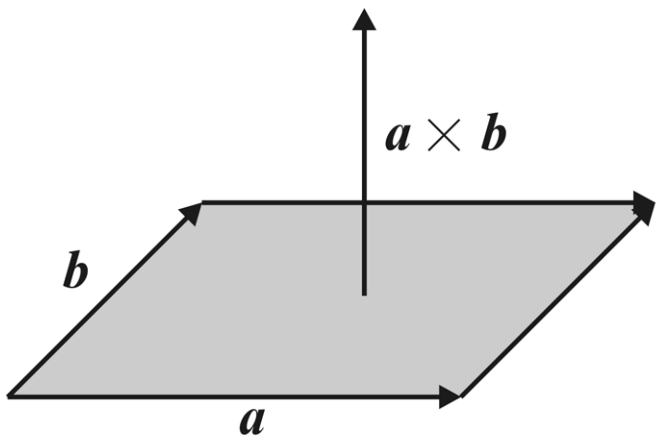
$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

ここで、エディントンの ε の定義は次式となる。

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -1 \\ 0 \end{cases}$$

幾何学的な意味は図の通りである。外積ベクトルは 2 つのベクトルの張る面積に等しい長さを持つ垂直なベクトルである。このとき、ベクトル $\boldsymbol{a,b,c}$ の張る平行 6 面体の体積は、3 解のテンソルであり、次式で表すことができる。

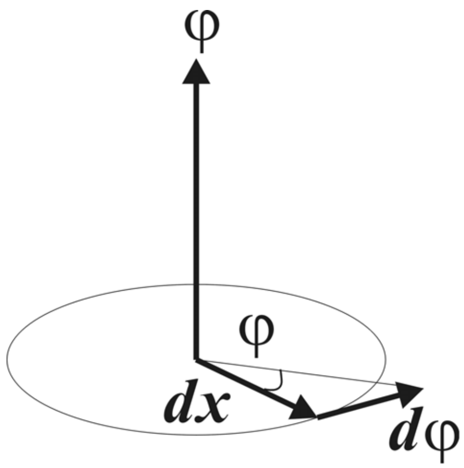
$$V = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$



○　回転ベクトル

　ネジの回転と進む距離は比例している。従って、図に示すようなベクトルφを考えると、線素ベクトル$\boldsymbol{dx}$とベクトルφの外積ベクトルは回転ベクトル$d\varphi$を表している。これから、ベクトルφの絶対値が下図の回転角φに等しく、かつ回転ベクトル$\boldsymbol{d}\varphi$の絶対値は次式となることを示す。

$$\|\boldsymbol{d}\varphi\| = |\varphi|\|\boldsymbol{dx}\|$$



まず、定義から次式が成り立つ。

$$d\varphi = \varphi \times d\boldsymbol{x}$$

成分で表示すると次式と等しい。

$$d\varphi_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j(dx_k)$$

　見方を変えると、これはdxから$d\varphi$への一次変換と考えられる。この一次変換をテンソルϕ_{ij}と定義すると次式を得る。

$$d\varphi = \phi(d\boldsymbol{x})$$

これを成分で表示すると、次式を得る。

$$d\varphi_i = \phi_{k\,i}(dx_k)$$

両者は等しいので、回転ベクトルφと回転テンソルϕが次の関係を満足する必要がある。

$$\varepsilon_{ijk}\varphi_j(dx_k) = \phi_{ki}(dx_k)$$

結局

$$\phi_{ki} = \varepsilon_{ijk}\varphi_j = \varepsilon_{kij}\varphi_j$$

これは、ベクトルφから回転テンソルϕを導くことができることを意味しており、両者は一対一に対応しているので、同じものだと考えてよい。

$$\varphi = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \phi = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & 0 & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

なぜなら、定義により次式が成立するからである。

$$\phi_{12} = \varepsilon_{123}\varphi_3 = \varphi_3 \qquad \phi_{23} = \varepsilon_{231}\varphi_1 = \varphi_1 \qquad \phi_{31} = \varepsilon_{312}\varphi_2 = \varphi_2$$
$$\phi_{21} = \varepsilon_{213}\varphi_3 = -\varphi_3 \qquad \phi_{32} = \varepsilon_{321}\varphi_1 = -\varphi_3 \qquad \phi_{13} = \varepsilon_{132}\varphi_2 = -\varphi_2$$

一方、回転テンソルが与えられれば、ベクトルφも一対一で定まるから、次式を得る。

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{12} & -\phi_{13} \\ -\phi_{12} & 0 & \phi_{23} \\ \phi_{13} & -\phi_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{bmatrix}\phi_{23} & \phi_{13} & \phi_{12}\end{bmatrix}$$

これらの関係は次式で与えられる。

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\phi_{jk}$$

結局、任意の交代テンソルϕは、一対一に対応するベクトルφ周りの回転を表していることが分かる。従って、次式が証明された。下式のベクトルと一次変換の関係は、図のベクトル同士の関係に等しい。

$$d\varphi = \phi(dx)$$

○　回転ベクトル $\boldsymbol{d\varphi}$ の絶対値

ここで、回転ベクトル $d\varphi$ の大きさを求めてみる。実際に計算すると次式となる。

$$d\varphi = \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ d\varphi_2 \\ d\varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_2 dx_3 - \varphi_3 dx_2 \\ \varphi_3 dx_1 - \varphi_1 dx_3 \\ \varphi_1 dx_2 - \varphi_2 dx_1 \end{bmatrix}$$

従って、

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{d\varphi}\|^2 &= (\varphi_2 dx_3 - \varphi_3 dx_2)^2 + (\varphi_3 dx_1 - \varphi_1 dx_3)^2 + (\varphi_1 dx_2 - \varphi_2 dx_1)^2 \\ &= (\varphi_3{}^2 + \varphi_2{}^2) dx_1{}^2 + (\varphi_3{}^2 + \varphi_1{}^2) dx_2{}^2 + (\varphi_1{}^2 + \varphi_2{}^2) dx_3{}^2 \\ &= (dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2)(\varphi_1{}^2 + \varphi_2{}^2 + \varphi_3{}^2) \\ &= \|\boldsymbol{dx}\|^2 \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

上式の変形を行う際に $\boldsymbol{dx}$ と φ は直行することを用いた。　結局、回転ベクトル $\boldsymbol{d\varphi}$ の大きさは図中の角度 φ と同じ大きさであることが分かる。

結局、一般的に、交代テンソルは物理的に回転を表していることが分かった。微分テンソルが具体的に与えられたときの、物体の変位は膨張と回転で与えられることが分かっている。変位ベクトル $\boldsymbol{dv}$ のうち、回転成分 $\boldsymbol{d\varphi}$ に対応する交代テンソルは回転テンソルを意味しているが、微分テンソルを対称テンソルと交代テンソルに分解する仕方は、ただ１通りしかない。従って、微分テンソルの交代成分からなるテンソルは、図で示した物理的な意味を持つ回転テンソルに他ならない。

従って、次式で回転テンソルを定義すると、自然に回転ベクトル $\boldsymbol{d\varphi}$ と対応することが分かる。

$$\phi_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\nabla_1 v_2 - \nabla_2 v_1) & \frac{1}{2}(\nabla_1 v_3 - \nabla_3 v_1) \\ \frac{1}{2}(\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2) & 0 & \frac{1}{2}(\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2) \\ \frac{1}{2}(\nabla_3 v_1 - \nabla_1 v_3) & \frac{1}{2}(\nabla_3 v_2 - \nabla_2 v_3) & 0 \end{bmatrix}$$

固体物理学では、回転テンソルは結局、線素ベクトルの剛体回転を表しているだけなので、応力が発生しないから、表舞台には登場しない。結局、微分テンソルのうち回転成分を取り除いた残りである対称成分がひずみテンソルであり、こちから重要な意味を持つ。