固体力学特論

（第　5　回）

武蔵工業大学工学部建築学科

西村研究室

○ ひずみテンソル

釣り合い状態にある点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。点 P は点 P^* に移動したとする。このとき点 $P(\boldsymbol{x})$ の近傍に点 $Q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx})$ がある。点 Q は点 Q^* に移動したとする。このとき、変位テンソルは下式で与えられる。

$$D = D_{i\ j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} & \dfrac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{de} + \boldsymbol{d\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad D(\boldsymbol{dx}) = E(\boldsymbol{dx}) + \phi(\boldsymbol{dx})$$

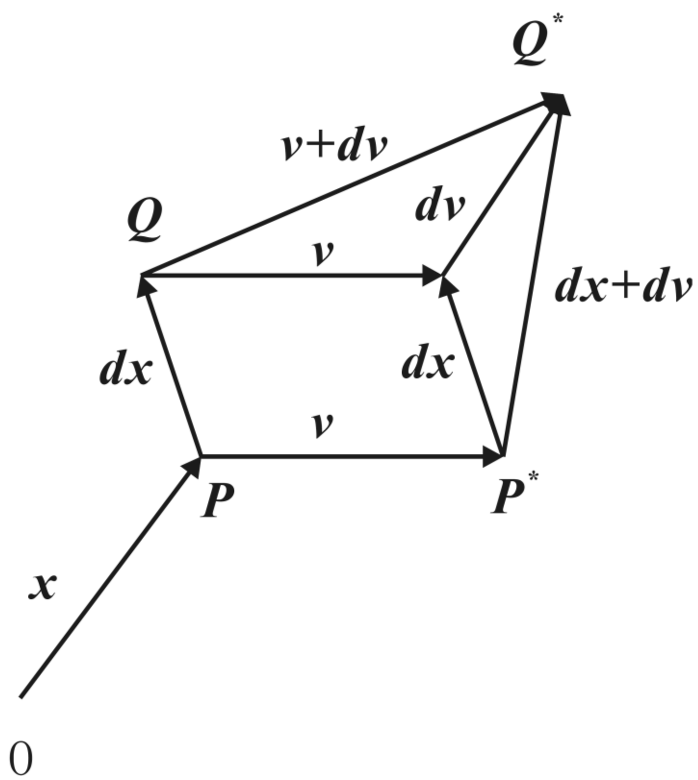


図１　変位テンソルの定義

すでに、回転ベクトルと回転テンソルの関係が導かれている。

$$\phi = \frac{1}{2}\left(D - D^t\right)$$

従って、ひずみテンソルの成分は次式で与えられる。

$$E = \frac{1}{2}\left(D + D^t\right)$$

ひずみベクトル $\boldsymbol{de}$ の内、線素ベクトル $\boldsymbol{dx}$ と同じ向きを向いている成分を考える。このとき拡大率を e とおけば、拡大ベクトルは次式と等しい。

$$e\,\boldsymbol{dx} = e\,\boldsymbol{\lambda} ds$$

一方、定義によりひずみベクトルは、ひずみテンソルによって次式で与えられる。

$$\boldsymbol{de} = E(\boldsymbol{dx})$$

従って、拡大率 e は、次式で与えられる。

$$e \ = E(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

前回見たように、拡大ベクトル $\boldsymbol{de}$ の意味から、上の式は明らかである。しかし、3 次元空間で考えるならば、図 1 を参照すると分かるように、単位球面上では接平面が 2 次元でこれに直交するベクトルが拡大ベクトルとなる。

線素 $\boldsymbol{dx}$ は変位（Displacement）して、$\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{dv}$ となる。しかし、変形(Deformation)に関係しているのは $\boldsymbol{dv}$ から $\boldsymbol{d\varphi}$ を除いたものであり、これが $\boldsymbol{de}$ となる。しかし、変形を表す $\boldsymbol{de}$ のうち体積膨張を表す成分とせん断変形を表す成分は分離することができる。これを図示したものが、図 1 である。

従って、次式が成立する。

$$\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{d\varphi} + \boldsymbol{de}$$

$$\boldsymbol{de} = e\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{d\theta}$$

従って、

$$\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{d\varphi} + \boldsymbol{d\theta} + e\boldsymbol{dx}$$

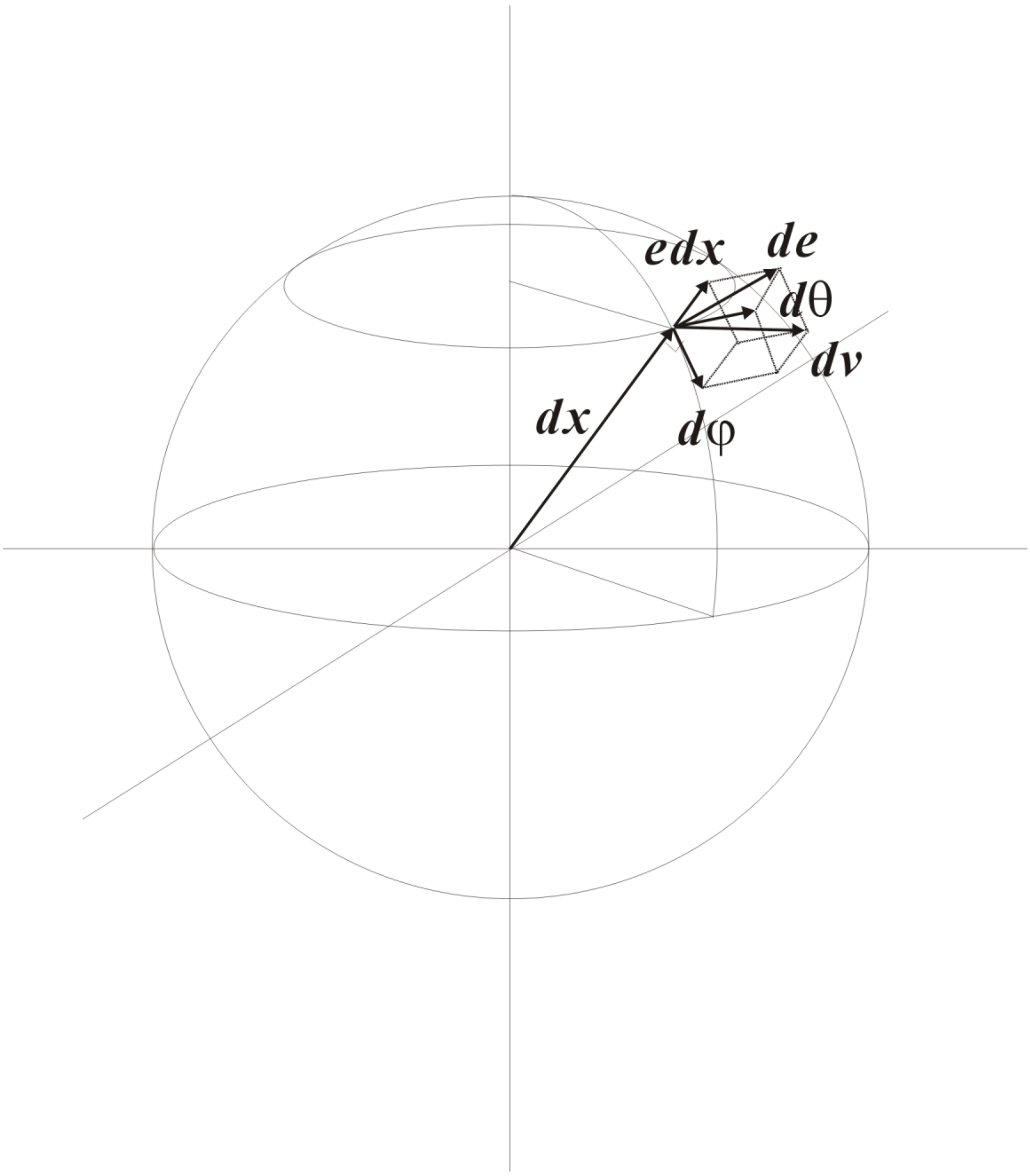


図１　変位ベクトル$\boldsymbol{dv}$、回転ベクトル$\boldsymbol{d\varphi}$、ひずみベクトル$\boldsymbol{de}$
体積膨張ベクトル$\boldsymbol{edx}$、せん断ベクトル$\boldsymbol{d\theta}$

既に見たように、回転ベクトル$d\varphi$は線素ベクトル$\boldsymbol{dx}$と直交する。しかし、せん断変形ベクトル$\boldsymbol{d\theta}$は、回転ベクトルと直交するのであろうか。$\boldsymbol{d\theta}$が接平面上にある限り、$\boldsymbol{d\theta}$と$\boldsymbol{dx}$は直交する。しかし、$\boldsymbol{d\theta}$と$\boldsymbol{d}\varphi$が直交するかどうかは、まだ不明である。

まず、両者の内積を取ると次式を得る。

$$\boldsymbol{d}\varphi\cdot\boldsymbol{d\theta}=\phi(\boldsymbol{dx})\cdot\left(E(\boldsymbol{dx})-e\boldsymbol{dx}\right)=\phi(\boldsymbol{dx})\cdot E(\boldsymbol{dx})$$

回転行列ϕとひずみ行列の縮約をとると次式を得る。

$$A_{ik}=\phi_{ij}E_{jk}=-\phi_{ji}E_{kj}=-E_{kj}\phi_{ji}$$

一方、行列 A の転置行列は

$$A_{ki}=\phi_{kj}E_{ji}=-\phi_{jk}E_{ij}=-E_{ij}\phi_{jk}$$

従って、行列 A の対角項は必ずしもゼロとならない。従って、両ベクトルは必ずしも直行しないが、同一平面上には存在する。

○ ひずみテンソルの成分

変位のベクトルフィールドが $v=(u,v,w)$ で与えられたときには、定義から、ひずみテンソルの成分は次式で与えられる。

$$E=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$

これが、デカルト座標系で表した変位とひずみの関係式（６つ）である。

○発散（Divergence）

線素ベクトルと拡大ベクトルは平行している。また、回転ベクトルと線素ベクトルは直交している。従って、拡大ベクトルの絶対値を計算することができる。単位ベクトル λ 方向への、拡大ベクトルの大きさを e と定義する。

$$e=D(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda})=D_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

従って、x 方向への単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ について考えると、x 方向への拡大率 e_x を求めることができる。

$$e_x=D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)=D_{11}$$

同様にして、y 方向と z 方向への拡大率も求めることができる。結局、立方体の体積が増大した比率を求めることができる。体積の増大は、

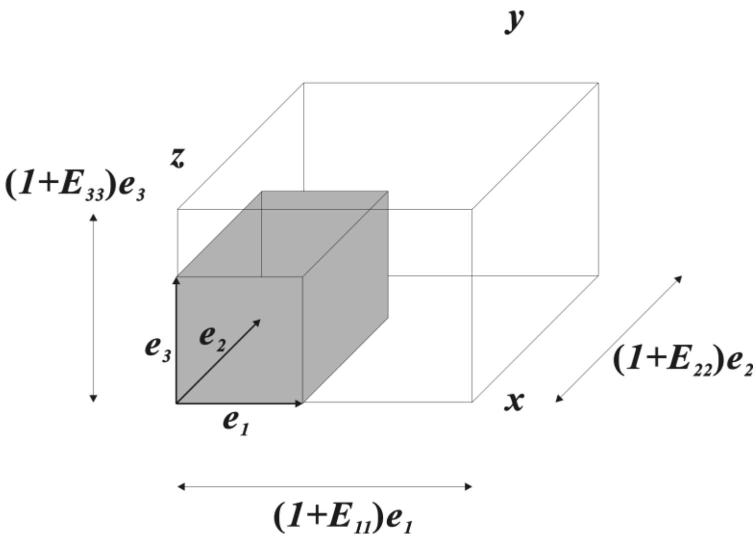
$$\left((e_x+1)(e_y+1)(e_z+1)-1\right)dxdydz=(D_{11}+D_{22}+D_{33})dxdydz$$

この増大した体積を全領域について体積積分すれば、もとの物体からどれだけ増大したかを求めることが可能となる。

$$\int (D_{11}+D_{22}+D_{33})dxdydz=\int\nabla_i v_i dV$$

ここで、ベクトル場の微分テンソルのトレースを発散と呼ぶ。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla_i v_i$$



ひずみのテンソルの発散（ダイバージェンスと呼ぶ）は、体積ひずみと呼ばれることがある。体積ひずみは明らかにスカラー量であり、しかも空間に分布している。従って、体積ひずみはスカラーフィールドでもある。

幾何学的に考えると、どのような座標系をとっても体積ひずみは同じ値にならなければならない。従って、

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e$$

通常、座標系が回転すると、ベクトルの成分やテンソルの成分は、当然変化する。しかし、座標系が回転しても、スカラー量である体積ひずみは変化しない。従って、上記の値も変化しない。このように、座標系が回転しても、変化しない量を不変量と呼ぶ。

一次変換には、固有値という概念がある。固有値は、座標変換に対して変化しない。ひずみテンソルの固有値を求めてみる。

$$E\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad (E - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

固有値の満足する方程式を固有方程式と呼ぶ。それは、上式の行列式がゼロであることから導かれる。

$$\det\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \lambda & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \lambda & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

従って、固有方程式は

$$\lambda^3-\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\lambda^2+\left(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\lambda_{zx}{}^2\right)\lambda$$
$$-\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+2\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{xz}-\gamma_{xz}{}^2\varepsilon_y-\gamma_{yz}{}^2\varepsilon_x-\gamma_{xy}{}^2\varepsilon_z=0$$

座標系が変化しても、固有方程式の根が変化しないためには各係数が不変でなければならない。2 次、3 次のひずみは元々小さいので、無視して考えれば、ひずみのテンソルにおける不変量は体積ひずみのみと考えてよい。

〇適合条件式

変形のベクトル場の成分は３つある。ところが、ひずみのテンソル成分は 6 つある。当然両者は１対１に対応していない。実は、ひずみと変位の関係式 6 つだけでは、1 対１の関係を導くのに、不十分である。自由度は３つであるから、3 つ方程式が足りない。この方程式を適合条件式と呼ぶ。もしも、応力の釣り合い式を変形（u,v,w）を用いて記述したときには、適合条件式は必要でない。しかし、応力の釣り合い式をひずみ、あるいは応力で記述したときには、適合条件式を省略することはできなくなる。

適合条件式は、次式となる。

$$\nabla_i\nabla_j E_{kl}+\nabla_k\nabla_l E_{ij}=\nabla_i\nabla_k E_{lj}+\nabla_l\nabla_j E_{ik}$$

3 次元の場合について書き下すと下式となる。

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$
$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z}$$
$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{zy}}{\partial z\partial y}$$
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)$$

2次元の場合の適合条件式は重要であるので下に示す。この場合は、1つだけとなる。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

例題１

３次元空間で変形のベクトルフィールドが次式で与えられたとする。このとき、ひずみのテンソルを求めよ。

$$V(x,y,z)=\begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

例題２

上記の変形ベクトル場が与えられたとき、体積ひずみのスカラー場を求めよ。

例題３

点 P(1,1,1)における方向(１、－１、１)への伸び率を求めよ。

例題４

点 P(1,1,1)における体積ひずみを求めよ。