固体力学特論

（第　６　回）

武蔵工業大学工学部建築学科

西村研究室

○　積分の復習（1 変数のとき）

全微分 df が与えられたとき、積分 f が求められたとする。このとき、次の関係が成り立つ。ただし、f は全区間で連続、かつ微分可能である。

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(\frac{df}{dx}\right)dx = \int_a^b df = f(b) - f(a)$$

このとき、全微分 df と関数 $g(x)dx$ は等しい。

$$df = g \cdot dx$$

積分とは、関数 g に対して関数 f を求めることである。関数 f を関数 g のポテンシャルと呼ぶこともある。このように、積分作用は次のように定義できる。

$$df(x) \overset{\int}{\rightarrow} f(x)$$

即ち、積分とは微分の逆変換である。

○　方向積分（線積分）

スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ に対して、方向微分を定めた。同じようにして、方向積分を定義する。そのために、全微分 df の積分を定義する。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3 = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{dx}$$

この積分を次のように定義する。

$$f(\boldsymbol{x}) = \int df = \int \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 = \int \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{dx}$$

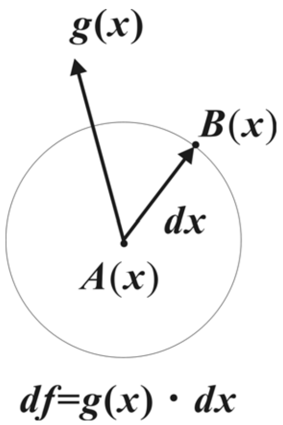
空間において、ベクトル場 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ が与えられたとき、スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ が求められたとする。このとき、次の関係が成り立つ。ただし、f は全区間で連続、かつ微分可能である。

$$\int_{AB} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{AB} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

ここで、

$$g_i(\boldsymbol{x})dx_i = df(\boldsymbol{x})$$

1 次元における積分の 3 次元への自然な拡張である。これをベクトル場 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ の線積分とよぶ。スカラー関数 f をベクトル関数 $\boldsymbol{g}$ のポテンシャルと呼ぶ。

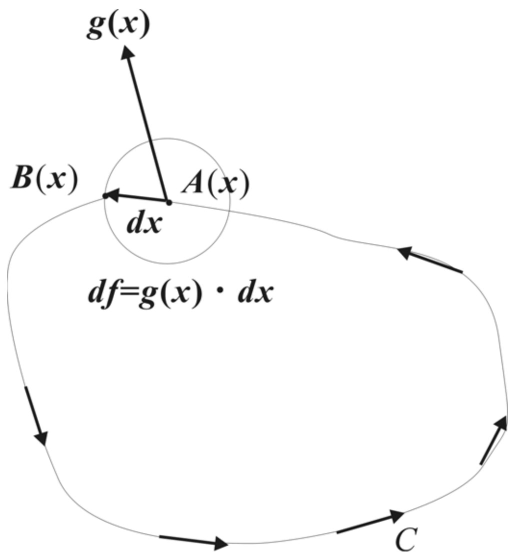


○　線積分

線積分素を曲線に沿って一回転すると、一周積分を求めることができる。下図参照。

$$I = \oint \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$$

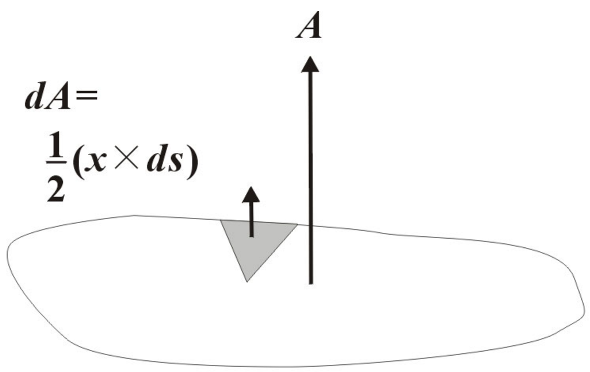
スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ の方向微分として、ベクトル場 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ が定まる場合には、一周積分はゼロとなる。

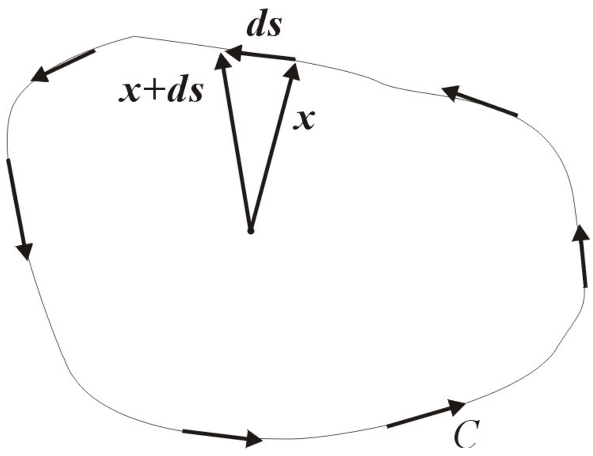


○　面積分

ここで、面積ベクトル $\boldsymbol{A}$ を次式で定義する。図を参照しよう。

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{ds}$$





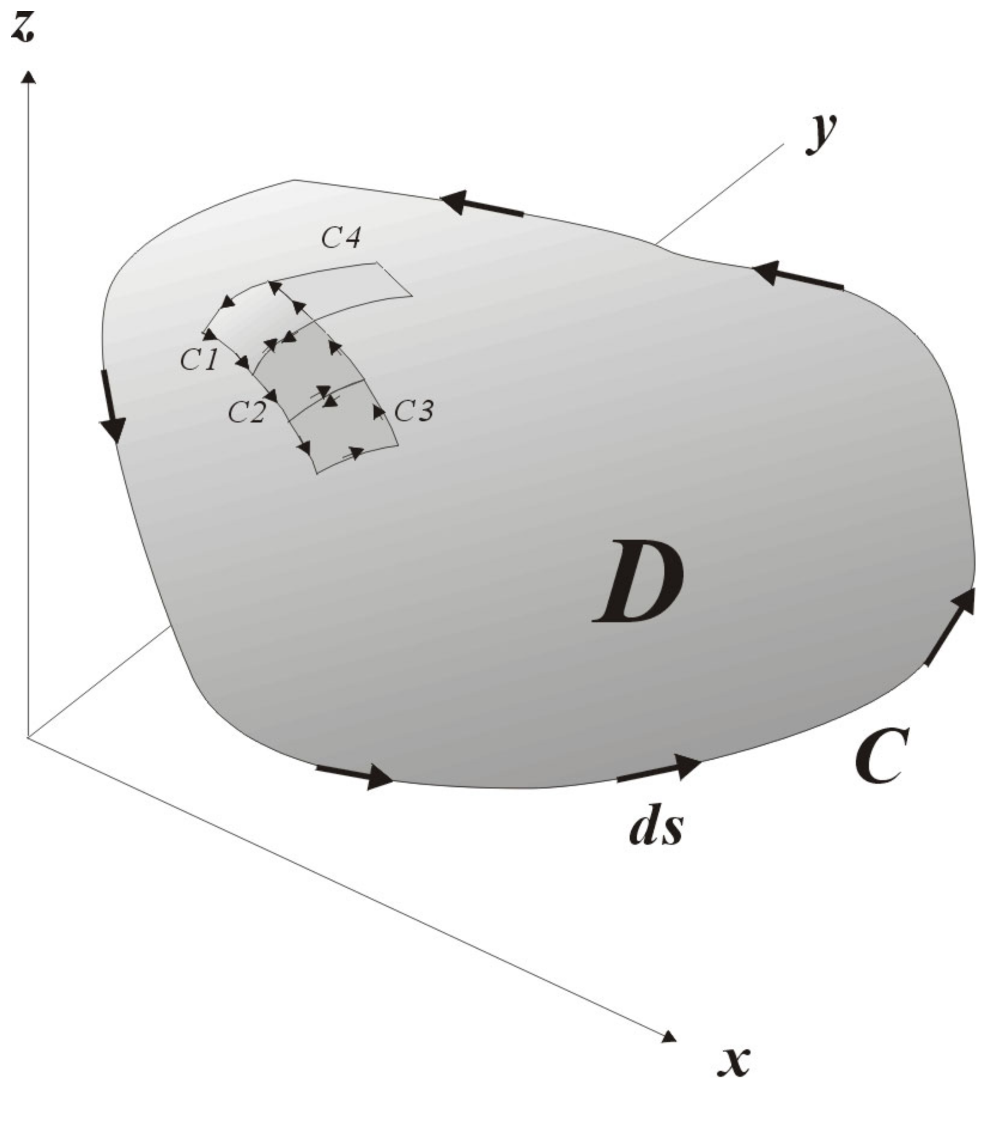
例えば、xy 平面上の閉曲線 C で囲まれた面積 A は次式で与えられる。

$$A\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx)\ \boldsymbol{e}_3$$

このように、面積はベクトルとなる。

○ストークスの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が空間に存在している。このとき、曲面の領域 D が与えられている。この領域 D を細かく分解し、各領域の境界線を $C_i\,(i=1,2,3,...n)$ とする。また、全領域 D の境界を C とする。以上の関係を下図に示す。



空間内の領域 D と境界線 C

このとき、ベクトル場$\boldsymbol{v}$の境界$\boldsymbol{C}$に沿った線積分を$\boldsymbol{I}$と定義する。

$$I = \oint_C v \cdot ds = \oint_{dc1} v \cdot ds + \oint_{dc2} v \cdot ds + \oint_{dc3} v \cdot ds + .. + \oint_{dci} v \cdot ds + ...$$

分割した小領域の境界どうしは、線積分が逆向きとなるので、打ち消しあって積分値がゼロとなるからである。分割する曲線の形状によらずに上式が成立するから、小領域として単位円を考えて線積分を評価することを考える。

$$I = dI_1 + dI_2 + dI_3 + ...$$

ここで、

$$dI_i = \oint_{dc_i} v \cdot ds$$

ベクトル場vの点$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$における値を$v_P$とすれば、考えている境界$\boldsymbol{dc_i}(= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx})$上でのベクトル場$v$は次式で与えられる。

$$v = v_P + dv$$

一方、方向微分$\boldsymbol{dv}$は、次式で与えられる。

$$\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{dx} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{de} + \boldsymbol{d}\varphi$$

従って、ベクトル場$\boldsymbol{v}$の単位円に沿った線積分は、次式となる。

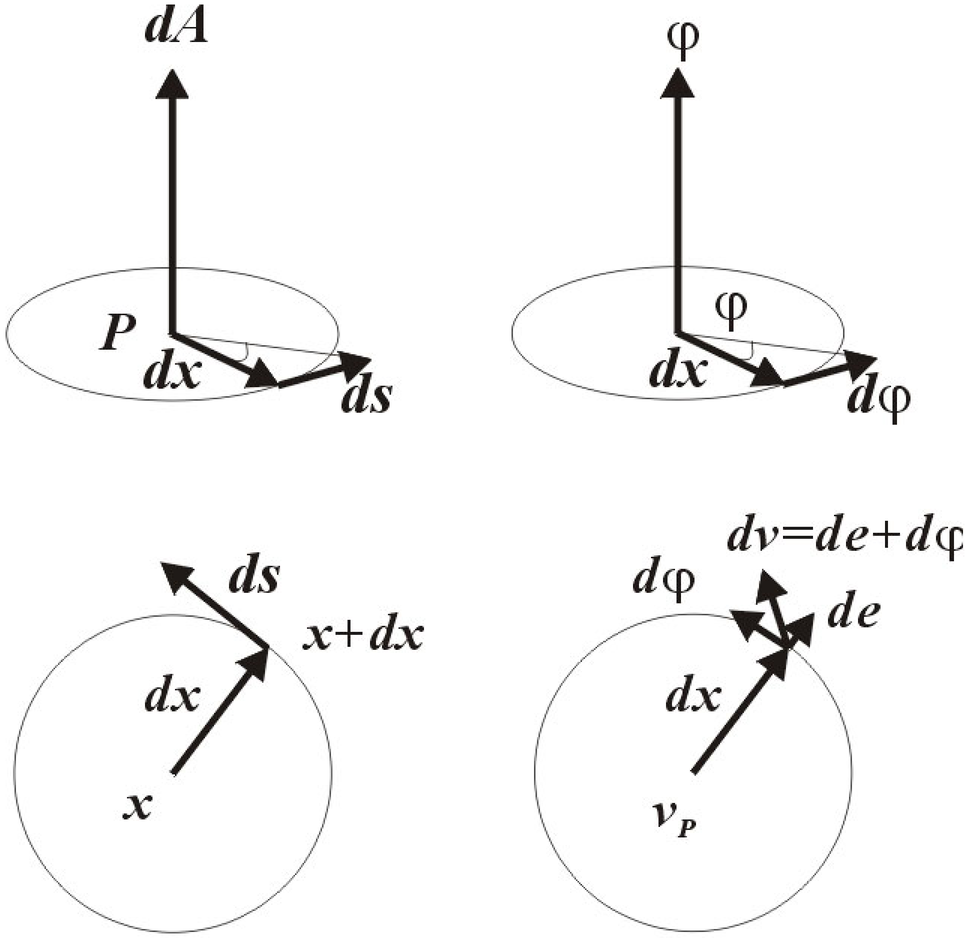
$$\begin{aligned} \boldsymbol{dI_i} &= \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{ds} = \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{v_P} \cdot \boldsymbol{ds} + \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{dv} \cdot \boldsymbol{ds} \\ &= \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{dv} \cdot \boldsymbol{ds} = \oint_{\boldsymbol{dc_i}} (\boldsymbol{de} + \boldsymbol{d\varphi}) \cdot \boldsymbol{ds} \end{aligned}$$

微分ベクトルのうち拡大ベクトル$\boldsymbol{de}$と線素ベクトル$\boldsymbol{ds}$は直交するので内積はゼロとなる。従って、微分ベクトルは回転ベクトルに置き換えて構わない。

$$\boldsymbol{dI} = \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{d\varphi} \cdot \boldsymbol{ds} = \oint_{\boldsymbol{dc_i}} (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{dx}) \cdot \boldsymbol{ds} = \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{\varphi} \cdot (\boldsymbol{dx} \times \boldsymbol{ds}) = \boldsymbol{\varphi} \cdot \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{dx} \times \boldsymbol{ds} = 2\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{dA}$$

従って、次の関係が成立する。これをストークスの定理と言う。

$$\oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{ds} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\infty} \oint_{\boldsymbol{dc_i}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{ds} = 2\iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{dA} = \iint_{\boldsymbol{D}} (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{dA}$$



位置ベクトル　　ベクトル場

分割された小領域（単位円）における線積分と回転の関係

○　ガウスの発散定理

変形ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ について、体積素 $dx_1dx_2dx_3$ が膨張する割合を体積ひずみと定義した。この値は次式で与えられる。

$$I = \iiint_v \nabla_i \boldsymbol{v_i} dx_1 dx_2 dx_3$$

物理的な意味は、領域 V における体積の増大の総計を表している。一方、領域 V の境界面と変位ベクトルの内積を求めると、この領域から湧き出す量とこの領域に落ち込む量との総和が計算できる。

$$I = \int\int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

両者は明らかに等しい。従って、次式が成立する。

$$\iiint \nabla_i v_i dV = \int\int v_i n_i dS$$

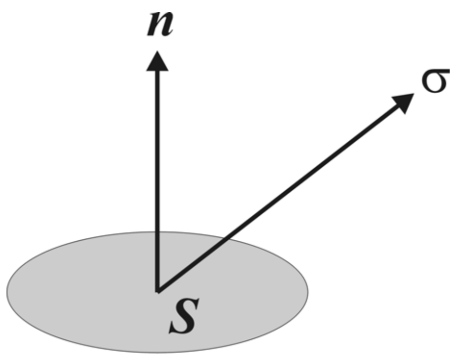
これをガウスの発散定理と呼ぶ。この関係はスカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ に対しても、また、テンソル場 $T_{ij}(\boldsymbol{x})$ に対しても成り立つ。

$$\iiint \nabla_i f \; dV = \int\int f \; n_i dS$$

$$\iiint \nabla_i T_{ij} dV = \int\int T_{ij} n_i dS$$

○　応力テンソル

応力とは単位面積に作用する力のことである。面積とは何であろうか？　それは、面に直角な単位ベクトルに面積の絶対値を掛け合わせたものである。そこで、面積ベクトルの単位法線ベクトルに単位堆積あたりの力（応力ベクトル）を対応させる一次変換（2階のテンソル）を応力テンソルと定義する。



$$\sigma = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$$

応力テンソルは対称テンソルである。ところで、ガウスの発散定理から次の関係が成り立つ。

$$\iiint \nabla_i T_{ij} dV = \iint_{\partial D} T_{ij} n_i dS = \iint_{\partial D} \sigma_i dS = 0$$

右辺の物理的な意味は、境界における反力と外力の面積積分による総和は釣り合っていることを示す。従って、領域内における応力テンソルは次式を満足しなければならない。

$$\nabla_i T_{ij} = 0$$

これを、直交座標系で示すと良く知られた釣り合い式を得る。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{21}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{31}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{32}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

応力テンソルは次のように標記されることが多い.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

従って、3 次元における応力の釣り合い方程式は、次式となる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

応力テンソルは対称テンソルである。これは、等方性の材料の場合には、構成方程式を用いても照明することができるが、異方性の材料でも対称テンソルであることを証明することができる。ここでは、省略する。