固体力学特論

（第　7　回）

武蔵工業大学工学部建築学科

西村研究室

○　フックの法則と構成方程式

　等方性の材料を用いた場合、一様な圧縮力に対する体積ひずみと、体積膨張を伴わないひずみでは、弾性係数が異なることが理解できる。例えば、水などの場合には、せん断ひずみは容易であるから、図におけるせん断剛性⎧は、極めて小さいが、液体は体積膨張しにくいので体積弾性係数を表す⎩は大きい。そこで、応力テンソルとひずみの関係は、体積ひずみが無い場合と体積ひずみに分解して考えなければならない。

ここで、体積ひずみと平均ひずみを次式で定義する。

$$\text{体積ひすみ：}\quad e = E_{ii} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\text{平均ひずみ：}\quad \bar{e} = E_{ii} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$

せん断弾性係数Gと体積弾性係数Kを用いると、

図1を参照して分かるように、応力は次式にて与えられる。

$$\sigma = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{dx}) = (K - 2G)e\boldsymbol{I}(\boldsymbol{dx}) + 2G\boldsymbol{E}(\boldsymbol{dx})$$

これを次式で置き換えて、λとμをラメの定数と呼ぶ。

$$\sigma = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{dx}) = \lambda e\boldsymbol{I}(\boldsymbol{dx}) + 2\mu\boldsymbol{E}(\boldsymbol{dx})$$

結局、応力のテンソルとひずみのテンソルの関係は次式となる。

$$T_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

これを、微小変形におけるフックの法則という。

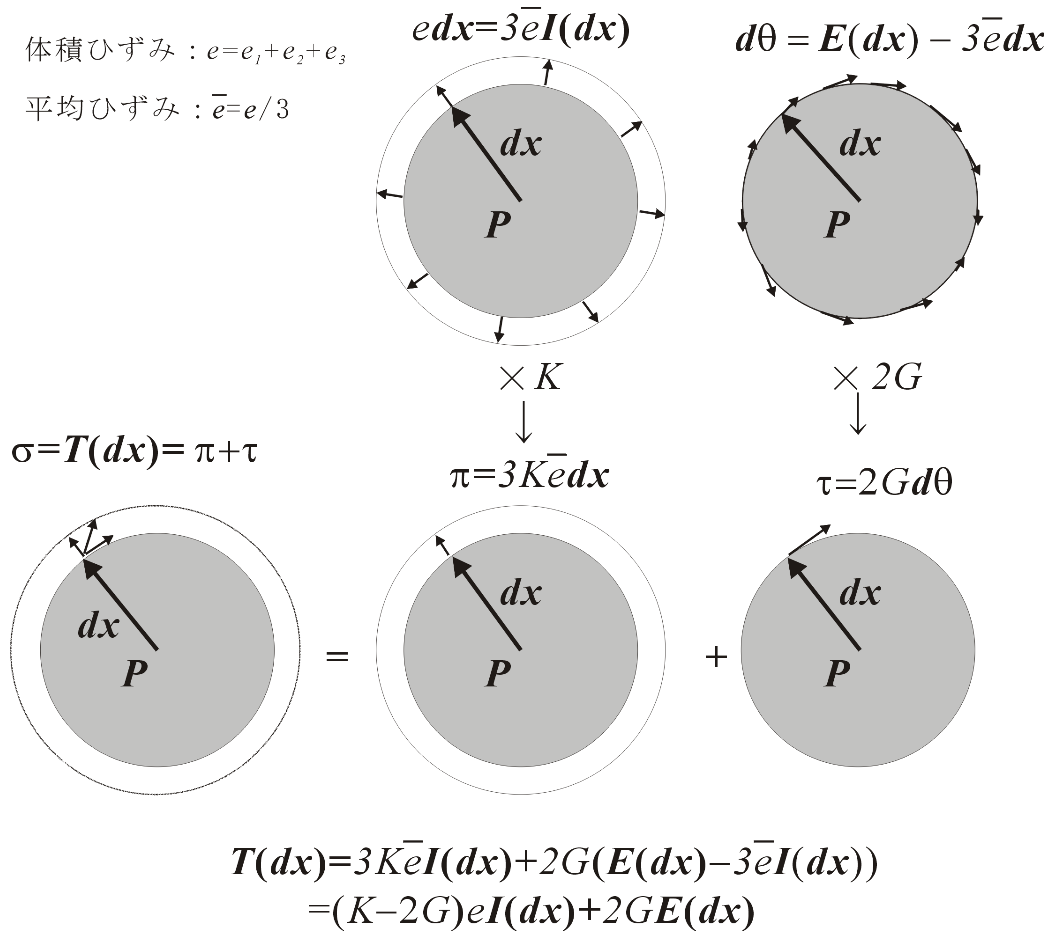

図１　ひずみと応力の関係（フックの法則）

○弾性理論の微分方程式

結局、弾性理論の方程式は以下にまとめられる。

変位とひずみの関係式

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)$$

応力とひずみの関係式

$$T_{ij} = \lambda\left(\nabla_k v_k\right)\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

応力の釣り合い式

$$\nabla i T_{ij} = 0$$

境界条件式

応力の境界条件：$\tau_i = T_{ij} n_j$　境界上で外力が与えられている。

変位の境界条件：　$v_i = \bar{v}_i$　境界上で変位が与えられている

弾性問題を変位vによって表現すると、以下の微分方程式を得る。

$$\nabla i T_{ij} = \nabla_i \lambda(\nabla_k v_k)\delta_{ij} + 2\mu \nabla_i E_{ij} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \nabla_i \lambda(\nabla_k v_k)\delta_{ij} + 2\mu \nabla_i E_{ij} &= \nabla_i \lambda(\nabla_k v_k)\delta_{ij} + 2\mu \nabla_i E_{ij} \\ &= \lambda(\nabla_i e)\delta_{ij} + \mu \nabla_i (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \\ &= \lambda(\nabla_j e) + \mu(\Delta v_j + \nabla_j e) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (\mu + \lambda)(\nabla_j e) + \mu \Delta v_j = 0$$

これが、変位で表したときの釣り合い方程式である。直交座標系で成分表示を行うと、次式を得る。

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right)u = 0 \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right)v = 0 \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right)w = 0 \end{aligned}$$

これが、直交座標系で表現した 3 次元の変位による釣り合い方程式である。ラメの定数はλとμは、それぞれ体積弾性係数 K とせん断弾性係数 G を用いると、次式の関係がある。

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G \qquad\qquad \mu = G$$

以上が微小変形の弾性理論である。微小変形の弾性理論解は、境界条件が与えられなければ具体的に解くことはできない。また、具体的な境界条件が与えられたときに、厳密解が得られる問題は数が少ない。

ところで、上記の変位で表した応力の釣り合い式を、x, y, z について微分して加えると、下式を得る。これは、体積ひずみに関する弾性理論で常に成り立つ関係である。

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 e}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 e}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 e}{\partial^2 z}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 e}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 e}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 e}{\partial^2 z}\right) = 0$$

一般にこの形の微分方程式を次式で表現し、ラプラスの方程式と呼ぶ。

$$\Delta e = 0$$