

中空断面を有する積層ゴム支承の鉛直剛性に関する解析的研究

ANALYTICAL STUDY OF THE COMPRESSIVE STIFFNESS OF HOLLOW CIRCULAR RUBBER BEARINGS

西村 功*, 山田俊一**, 坂本光雄***, 近藤明洋**, 小堀鐸二****

Isao NISHIMURA, Toshikazu YAMADA, Mitsuo SAKAMOTO,
Akihiro KONDO and Takuji KOBORI

Discussed in this paper is the vertical load supporting mechanism of laminated rubber bearings with hollow circular sections. The compressive stiffness of the hollow circular rubber bearings is analytically studied. Key issues discussed in this paper are 1) derivation of the governing equation that determines the compressive stiffness of the device 2) effect of bulk modulus on the compressive stiffness 3) proposition of a simple formula which is close to the rigorous solution. As a result of this analytical study, the compressive stiffness of the rubber bearings is proved to be 20 % smaller than is expected from the commonly used conventional model.

Keywords : rubber bearing, base isolation, compressive stiffness, bulk modulus, Bessel function, inverse method

積層ゴム、免震構造、鉛直剛性、体積弾性係数、ベッセル関数、逆解析法

1 序 論

免震構造に使用される積層ゴム支承の力学特性については既に多くの研究がなされており、通常の建物免震に用いられる積層ゴム支承については、定性的、定量的には解明されている。従って、現在の研究動向は、高圧縮軸力を受ける積層ゴム支承の耐力、鉛直剛性、水平剛性、座屈荷重、などの解明に向かっている(文献1,2,3)。

一方で、小型軽量の構造物に免震構造を用いようとする研究も、適用範囲を拡大するという観点から重要である。その場合、低軸力のもとで低い水平剛性を実現すること、部材寸法に比べて大きな水平変形能力を確保すること、など多くの課題がある。こうした課題を克服するため、さまざまな工夫を凝らした積層ゴム支承が既に考案されている。例えば、小型の積層ゴム支承を多数組み合わせることによって、長い固有周期と大きな変形能力を合わせ持つ支承が考案され、超高層ビルの振動制御装置の支持部材として使用されている(文献4)。また別の試みとしては、中空断面形状を有する積層ゴム支承を用いる方法がある。この方法によれば、基本形状を大きく変更することなく、小型軽量の構造物を比較的長い固有周期で安定に支持できる(文献5)。しかし、その力学特性については不明な点が多く、解析的な研究報告も少ない。

本研究は、小型軽量の構造物の免震、防振を目的とした中空断面形状を有する積層ゴム支承(以下、中空積層ゴムと呼ぶ)について、その力学特性を解明し合理的な設計資料を提供するために行われたものである。明らかにすべき点は、鉛直剛性、曲げ剛性、せん断剛性、水平剛性、鉛直軸力による水平剛性の減少、荷重-変形関係の線形性、座屈荷重、などである。本論文では、このうち鉛直剛性について解析的考察を行った。

解析方法は、逆解析法を用いる。得られた解は、3次元軸対称の微小変形弹性理論の範囲で応力の釣り合い式を満足する。この厳密解はベッセル関数となるので、応用面で若干不便である。そこで指數関数による簡単な近似解を導き、厳密解と数値解析的に比較検討した。その結果、この近似解は精度が高く、かつ、ゴム層の厚みによる誤差の少ないと判った。従来広く用いられていた評価式と比較して、本論文で計算された理論的鉛直剛性は、約20%低いことが判明した。また、従来の近似式は形状係数という定数を導入して提案されており、ゴムの層厚が薄くなると誤差が増大する傾向にあつたが、この点が改善された。最後に、積層ゴムの自由境界面の変形について考察を行い、ゴムの膨らみ変形量は従来の非圧縮性を仮定した評価式と比較して、かなり少ないことを理論的に示した。

* 鹿島小堀研究室制震構造研究部 博士(工学)

** 鹿島小堀研究室制震構造研究部 工修

*** 鹿島小堀研究室制震構造研究部 部長

**** 京都大学名誉教授 鹿島最高技術顧問・工博

Kobori Research Complex, Kajima Corporation, Dr. Eng.

Kobori Research Complex, Kajima Corporation, M. Eng.

Kobori Research Complex, Kajima Corporation

Prof. Emeritus of Kyoto Univ., Kobori Research Complex, Kajima Corporation, Dr. Eng.

2 鉛直剛性に関する既往の研究

中空積層ゴムに限らず、一般的な積層ゴム支承の鉛直剛性を評価する試みとしては、Gent, Lindley らによる研究が古くからよく知られている文献⁶。彼らは、ゴム材料の非圧縮性を仮定することによって簡便な評価式を導いた。

Chalhoub, Kelly らは、ゴム材料の体積弾性係数が鉛直剛性に与える影響を、かなり厳密に評価した(文献⁷)。彼らは、微小変形の3次元弾性論をもとに、応力の釣り合い方程式を圧縮力に関して解き、それがベッセルの微分方程式で表現できること、Gent, Lindley らが示した近似解は厳密解にかなりよく一致すること、などを示した。

一方、Constantinou, Kartoum, Kelly らはChalhoub らの導いた支配方程式を中空積層ゴム支承にも発展させ(文献⁸)、ベッセル関数による解が得られることを示した。さらに、振動法による近似解を示し、簡便でかなり正確な鉛直剛性の評価式を提案した。この近似式は、中空断面の場合も形状係数を定義することが可能で、円形断面の場合と同様の手法で鉛直剛性の評価が行えることを示した。

しかし、Chalhoub, Kelly らの導いた圧縮力の支配方程式は、積層ゴムの自由境界面の変形形状を2次関数と仮定しており、そのため応力の釣り合い方程式が満足されない。そこで著者らは微小変形の弹性理論の範囲で積層ゴムの圧縮剛性を正確に評価できないかと考え、応力の釣り合い方程式を微視的に満足できる厳密解を導いた。

3 鉛直剛性の解析方法

本論文中で考察する積層ゴム支承は図1に示す形状を有する。即ち、鋼板とゴム材料の互層構造でゴム材料は鋼板に隙間なく接着されており、積層ゴム支承の断面の中心部分には比較的大きな直径の円形孔を有している。荷重条件は、一様な垂直ひずみが鉛直方向に生じるように垂直強制変形を中空積層ゴム支承の両端部に加えることとする。ゴム材料は外周部分と内周部分では変位の拘束を受けることなく変形できるので、この自由境界面では応力の境界条件がゼロとなる。一方、積層支承の両端部での応力は方程式の解として求まる。なお、自由境界面の変形も方程式の解として得られる。

この問題で用いた解析手法は逆解析法として知られているものである。まず、積層ゴムの全領域で変形を仮定する。仮定した変位は、積層ゴムの両端部で境界条件を予め満足する必要がある。つぎに仮定した変形分布から応力の釣り合い方程式を導き、ゴムの存在する全ての領域でこれが満足されることを調べる。もし、ここで仮定した変形が上記の条件を満足しない場合は仮定した変形に修正を加え、再度、釣り合い方程式を導きこれが満足されるかどうか調べる。本論文では r 方向のゴムの変形を余弦関数で仮定すると、釣り合い方程式が満足されるので、これを正解とした。従って、積層ゴムの両端部で求めた応力を積分して反力を求め、変位の境界条件である鉛直変位で除すと、積層ゴム支承の鉛直剛性が求まる。

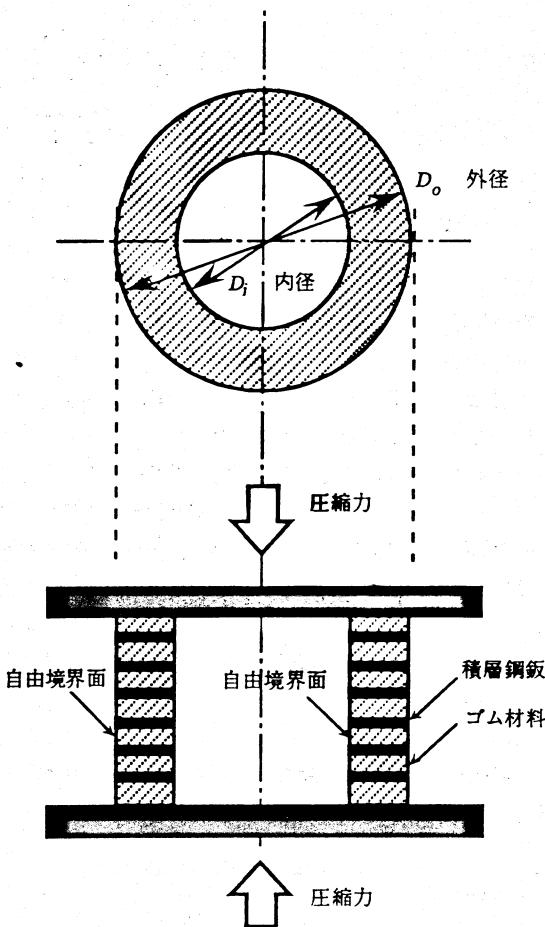


図1 中空積層ゴム支承の基本形

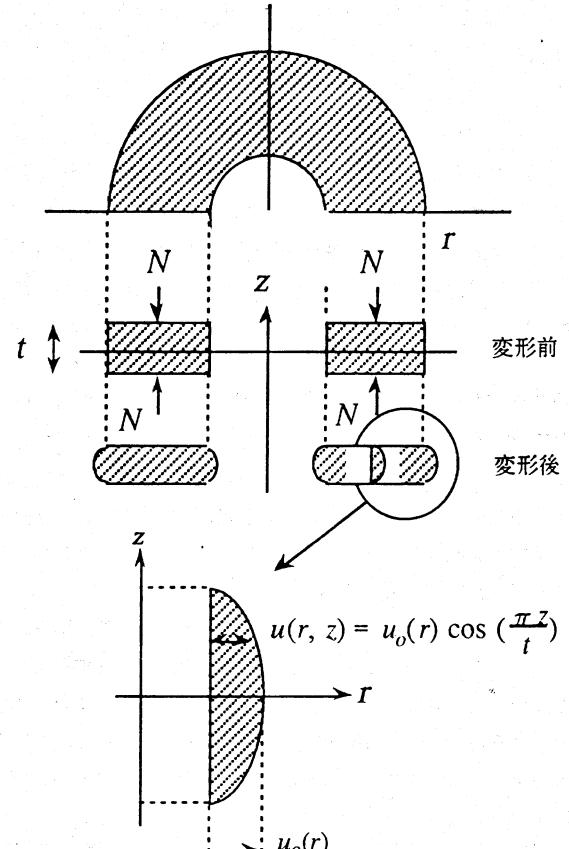


図2 ゴム1層の変形図

4 解析検討

ゴムの変位は軸対称で、半径方向(r)の変位を u 、積層方向(z)の変位を w 、とする。ゴム1層分を取り出し、自由境界面に余弦関数に比例した変形分布を与え、かつ両端部には一様な鉛直強制変位を加える。(図2参照)

$$u(r, z) = u_o(r) \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (1)$$

$$w(r, z) = w(z) = \varepsilon_c z \quad (2)$$

ここで、 t :ゴム1層の厚み

$u_o(r)$:ゴム1層の中央部分の膨らみ

ε_c :鉛直方向の圧縮ひずみ

3次元軸対称のひずみ成分は、次式にて与えられる。

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{du_o}{dr} \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{u_o}{r} \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \varepsilon_c \quad (5)$$

$$\gamma_{rz} = -\left(\frac{\pi}{t}\right) u_o(r) \sin\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (6)$$

ゴムの応力とひずみの関係は次式で与えられる。ただし、ゴム材料ではポアソン比が限りなく0.5に近いので体積弾性係数とラメの定数を同一視した。

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + K e(r, z) \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + K e(r, z) \quad (8)$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + K e(r, z) \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz} \quad (10)$$

$$p(r, z) = K e(r, z) \quad (11)$$

ここで、 G :ゴムのせん断剛性係数

K :ゴムの体積弾性係数

$e(r, z)$:体積ひずみ

$p(r, z)$:圧縮力

釣り合い方程式を応力の代りに変位で表現すると次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} (K+G)\frac{\partial e}{\partial r} + G\left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = 0 \\ (K+G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right. \quad (12) \quad (13)$$

式(12)から、圧縮力に関する支配方程式を導く。変位の各項を微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{du_o}{dr} \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{d^2 u_o}{dr^2} \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\left(\frac{\pi}{t}\right)^2 u_o(r) \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (16)$$

さらに体積ひずみと変位の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e(r, z) &= \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z \\ &= \left[\frac{du_o}{dr} + \frac{u_o}{r} \right] \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) + \varepsilon_c \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial e(r, z)}{\partial r} = \left[\frac{d^2 u_o}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_o}{dr} - \frac{u_o}{r^2} \right] \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (18)$$

これらを式(12)に代入すると次の関係を得る。

$$\frac{d^2 u_o}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_o}{dr} - \frac{u_o}{r^2} = \frac{u_o}{l^2} \quad (19)$$

ここで、つぎの定数を導入した。

$$l = \left(\frac{t}{\pi}\right) \sqrt{\frac{K+2G}{G}} \quad (20)$$

式(19)を式(18)に代入すると、式(21)を得る。

$$\frac{\partial e(r, z)}{\partial r} = \frac{u_o(r)}{l^2} \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) = \frac{u(r, z)}{l^2} \quad (21)$$

式(21)を更に微分して次式を得る。

$$\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} = \left[\frac{du_o}{dr} + \frac{u_o}{r} \right] \frac{1}{l^2} \cos\left(\frac{\pi}{t}z\right) \quad (22)$$

体積ひずみと変形の関係式(17)を考慮すると

$$\frac{\partial^2 e(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e(r, z)}{\partial r} = \left(\frac{1}{l}\right)^2 [e(r, z) - \varepsilon_c] \quad (23)$$

一方、残りの釣り合い式(13)から

$$(K+G)\frac{\partial e}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

従って、圧縮力分布が z 方向に変化しないことが条件となる。最終的に、式(23)と式(24)から、圧縮力の満足すべき支配方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{l^2} p(r) = -\frac{K}{l^2} \varepsilon_c \quad (25)$$

5 鉛直剛性の厳密解

圧縮力の方程式(25)の厳密解はベッセル関数を用いて、式(26)で与えられる。以後、式(25)の解を圧力関数とよぶ。

$$p(r) = K \varepsilon_c \left[B_1 I_o\left(\frac{r}{l}\right) + B_2 K_o\left(\frac{r}{l}\right) + 1 \right] \quad (26)$$

ここで

I_o : 第1種の変形ベッセル関数 (オーダーゼロ)

K_o : 第2種の変形ベッセル関数 (オーダーゼロ)

境界条件は、自由境界面で動径方向の応力がゼロである。

$$\sigma_r(R_i) = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_r(R_o) = 0 \quad (27)$$

ここで、 R_i : 内径 (半径) R_o : 外径 (半径)

従って、式(3)と式(7)を参照して

$$2G \frac{\partial u}{\partial r} + p(r) = 0 \quad \text{at} \quad r = R_o \text{ and } R_i \quad (28)$$

式(21)を参照して

$$l^2 \left(\frac{2G}{K} \right) \frac{d^2 p}{dr^2} + p(r) = 0 \quad \text{at} \quad r = R_o \text{ and } R_i \quad (29)$$

式(25)と式(21)を考慮すると、境界条件は式(30)で与えられる。

$$p(r) = \frac{2G}{K + 2G} \left(K \varepsilon_c + \frac{l^2}{r} \frac{dp}{dr} \right) \quad \text{at } r = R_o, R_i \quad (30)$$

圧力関数の一般解(26)を考慮すると

$$\frac{dp}{dr}(r) = \frac{K \varepsilon_c}{l} \left[B_1 I_1\left(\frac{r}{l}\right) - B_2 K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] \quad (31)$$

ここで

I_1 : 第1種の変形ベッセル関数 (オーダー-1)

K_1 : 第2種の変形ベッセル関数 (オーダー-1)

従って、積分定数 B_1, B_2 は式(26)と式(31)を式(30)に代入し、以下の連立1次方程式を解いて求める。

$$\begin{aligned} \frac{2G}{K + 2G} \begin{pmatrix} \frac{I_1(\lambda_i)}{\lambda_i} & -\frac{K_1(\lambda_i)}{\lambda_i} \\ \frac{I_1(\lambda_o)}{\lambda_o} & -\frac{K_1(\lambda_o)}{\lambda_o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} I_o(\lambda_i) & K_o(\lambda_i) \\ I_o(\lambda_o) & K_o(\lambda_o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K}{K + 2G} \\ \frac{K}{K + 2G} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで

$$\lambda_o = \frac{R_o}{l} \quad \text{and} \quad \lambda_i = \frac{R_i}{l} \quad (33)$$

従って、ひずみ ε_c が与えられたとき、反力としての両端の鉛直応力は式(9)から

$$\sigma_z = 2G \varepsilon_c + p(r) \quad (34)$$

鉛直反力 N はこれを全断面で積分して

$$N = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \sigma_z(r) r dr d\theta \quad (35)$$

上記積分を実行し、全断面積で除すと次式で定義された鉛直剛性のヤング率 E_c を求めることができる。

$$\frac{N}{\pi(R_o^2 - R_i^2)} = E_c \varepsilon_c \quad (36)$$

鉛直剛性のヤング率は次式で計算される。

$$E_c = 2G + \frac{2K}{(R_o^2 - R_i^2)} \times \int_{R_i}^{R_o} \left[B_1 I_o\left(\frac{r}{l}\right) + B_2 K_o\left(\frac{r}{l}\right) + 1 \right] r dr \quad (37)$$

上式を計算すると式(38)を得る。

$$E_c = 2G + K + \frac{2K}{(\lambda_o^2 - \lambda_i^2)} \times \left[(\lambda_o I_1(\lambda_o) - \lambda_i I_1(\lambda_i)) B_1 + (\lambda_i K_1(\lambda_i) - \lambda_o K_1(\lambda_o)) B_2 \right] \quad (38)$$

ここに示した解法に従えば、円形断面形状の積層ゴム支承の鉛直剛性の評価も行うことができる。円形断面の場合は中心部分の圧縮力が無限大にならないので、積分定数 B_2 はゼロである。応力の境界条件は外周部分のみで与えられ、積分定数 B_1 は次式にて与えられる。

$$B_1 = \frac{K}{2G \left(\frac{I_1(\lambda_o)}{\lambda_o} \right) - (K + 2G) I_o(\lambda_o)} \quad (39)$$

円形断面積層ゴム支承の鉛直剛性としてのヤング率は、結局式(40)で計算できる。

$$E_c = 2G + K + \frac{2KB_1}{\lambda_o} I_1(\lambda_o) \quad (40)$$

6 鉛直剛性の近似解

圧力関数 $p(r)$ に関する支配方程式(25)は、係数の違いを除けば Chalhoub, Kelly らの導いた方程式(文献7)に等しい。また Constantinou らは、振動法による方程式(25)の近似解法(文献8)を示している。この近似解法の物理的な意味は、ゴム材料の体積弾性係数 K がせん断弾性係数 G に比較してかなり大きいので、方程式(25)の左辺の第3項をまず無視して解を得て、次に無視したことによる誤差を繰り返し修正するものである。しかし、この問題に関する限り、収束がかなり遅い。

そこで、本論文では振動法に代わる近似解を求めた。通常の積層ゴム支承では、ゴムの厚みが極めて薄い。そのため、圧力分布は積層鋼板の全断面に対しほぼ一様に分布しており、自由境界面近傍の限られた部分でのみ圧力が変化すると考えられる。このことは、圧力関数が動径方向(r)に関して変化する割合が小さいことを意味するので、式(25)の第2項がその他の項に比較して無視し得るほど小さい、という仮定を設けるのと同じである。そこで、圧力関数が満足すべき微分方程式を次式で近似する。

$$\frac{d^2 p(r)}{dr^2} - \frac{p(r)}{l^2} = -\frac{K \varepsilon_c}{l^2} \quad (41)$$

この方程式の一般解は次式となる。

$$p(r) = K \varepsilon_c \left[A_1 \exp\left(\frac{r}{l}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{r}{l}\right) + 1 \right] \quad (42)$$

応力境界条件は式(30)で与えられるが、圧力関数の動径方向の微分係数が小さいことを考慮して式(30)を式(43)で近似する。

$$p(R_o) = p(R_i) = \frac{2GK}{K+2G} \varepsilon_c \approx 2G \varepsilon_c \quad (43)$$

従って、積分定数 A_1, A_2 が決定し

$$A_1 = \frac{1}{\exp(\lambda_i) + \exp(\lambda_o)} \left(\frac{2G - K}{K} \right) \quad (44)$$

$$A_2 = \frac{1}{\exp(-\lambda_i) + \exp(-\lambda_o)} \left(\frac{2G - K}{K} \right) \quad (45)$$

最終的に近似解 E_c は式(46)で与えられる。

$$E_c = 2G + K + \frac{2(K-2G)}{\lambda_o - \lambda_i} \frac{\exp(\lambda_i) - \exp(\lambda_o)}{\exp(\lambda_i) + \exp(\lambda_o)} \quad (46)$$

さまざまな中空断面と厚みを仮定して、本論文で示した厳密解と近似解との比較を示す。まず、断面の外径と厚みを固定し、断面の中空部分の大きさを変化させて鉛直剛性を評価した。次に、外径と内

径の大きさを固定し厚みを変化させて厳密解と近似解を比較した。両者はほとんど全ての領域でよく一致する。(図3参照)

図3からは、この近似解が大域的にかなり良い精度を持つことが判る。一方、式(46)を見ると、内径と外径の差が小さくなると誤差の増大が懸念される。このことは、中空断面の形状が大きくなつた場合の近似解の精度について、考察すべきであることを示している。実際に中空断面を大きくした場合の数値計算例を図4に示す。鉛直剛性の絶対値が相当小さくなる領域でも、近似解と厳密解はほとんど一致することが図4から読み取れる。従って、この近似解は局的に見ても、充分高い精度を維持している。以上の検討結果から、近似解(46)は、ゴム層の厚みや内径の大小にかかわらず精度のよいことが判る。

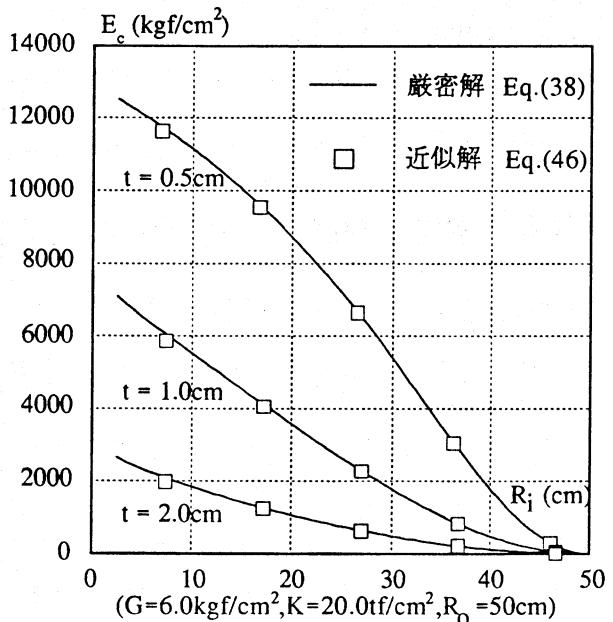


図3 ベッセル関数による厳密解と近似解

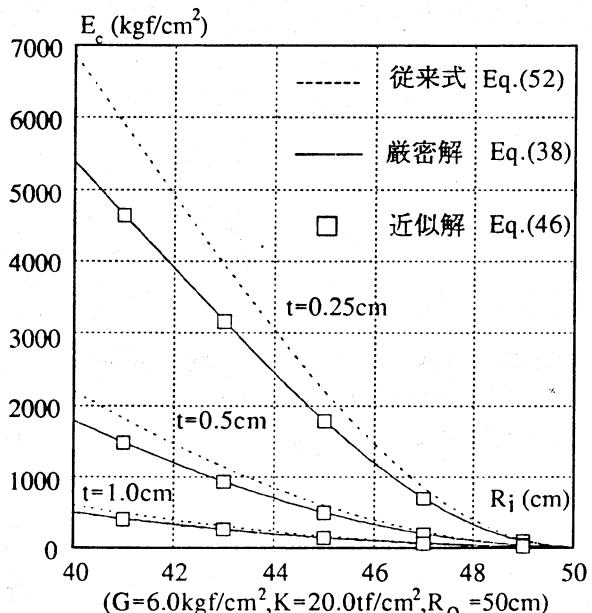


図4 従来式と厳密解ならびに近似解との比較

7 既往の研究との比較

Chalhoub らは自由境界面の変形を2次関数で近似し、圧縮力をゴム層の厚み方向に積分して平均を取り、この平均圧縮力式(47)に関する微分方程式(48)を得た。(文献7)

$$p_o(r) = \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} p(r, z) dz = \frac{K}{t} \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} e(r, z) dz \quad (47)$$

$$\frac{d^2 p_o(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_o(r)}{dr} - \frac{1}{m^2} p_o(r) = -\frac{K}{m^2} \varepsilon_c \quad (48)$$

$$\text{ただし } m = \frac{t}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{K}{G}} \quad (49)$$

式(48)の近似解を得るためにConstantinou らは、左辺の第3項の影響が少ないと考え(m の値が大きいので第3項が小さいと考えた。)摂動法による近似を行った。しかし、たった一回の摂動近似でもかなりの計算量となる。そこで、彼らは摂動法を1回で打ち切っている。結果のみ式(50)に示す。また、摂動法を2回行っても解の収束が遅く、表現が複雑になるだけで精度の向上は期待できない。

$$E_c = 6GF S^2 \left[1 - \frac{8GS^2}{K} H \right] \quad (50)$$

$$S = \frac{D_o - D_i}{4t} \quad (51)$$

ここで、 D_i ：中空部分の内径（直径）

D_o ：外径（直径）

式(50)の中で S は形状係数と呼ばれるもので式(51)で定義される。また、 H, F などの係数は摂動法の計算結果から得られる定数で(図5参照)、積層鋼板の形状から決まる。しかし、式(50)では形状係数が15よりも大きい場合、かなり誤差が増大するうえ(文献8による)、さらにゴム層厚が薄い場合はヤング係数が負になる。そこで、式(50)の代わりに式(52)を提案している。

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{6GS^2} \left(\frac{1}{F} \right) + \frac{4}{3K} \left(\frac{H}{F} \right) \quad (52)$$

しかし、この近似解では、積層ゴムの厚みが極めて薄い場合、鉛直剛性のヤング率が体積弾性係数に収束しない。また、形状係数が大きい場合の式(52)の理論的根拠はどこにも存在しない。なぜなら S が大きい場合は式(50)を式(52)で近似することができないからである。ただし、形状係数が10よりも小さいときは、式(52)の誤差は小さくなることも事実である。しかし、依然として厳密解と約20%の誤差が生じる。この理由は、形状係数が小さいときは式(50)が式(53)で近似できることから理解できる。

$$E_c = 6GFS^2 \quad (53)$$

鉛直剛性が形状係数の2乗に比例するので式(25)と式(48)の係数の差異が、そのまま結果に影響するからである。式(25)は式(48)と係数の違いを除いて全く同じである。式(20)と式(49)を比較すれば、実際の積層ゴムの厚みを0.906倍に評価したことになる。鉛直剛性は式(53)から判るように、厚みの2乗にはほぼ反比例するから、式(48), (49)に従うと厳密解に比べて21.7%高めの値を得る。図4には、厳密解と近似解ならびに従来式による比較を示す。同図に現れた厳密解(38)と従来式(52)による鉛直剛性の誤差はこのようにして生じたものである。

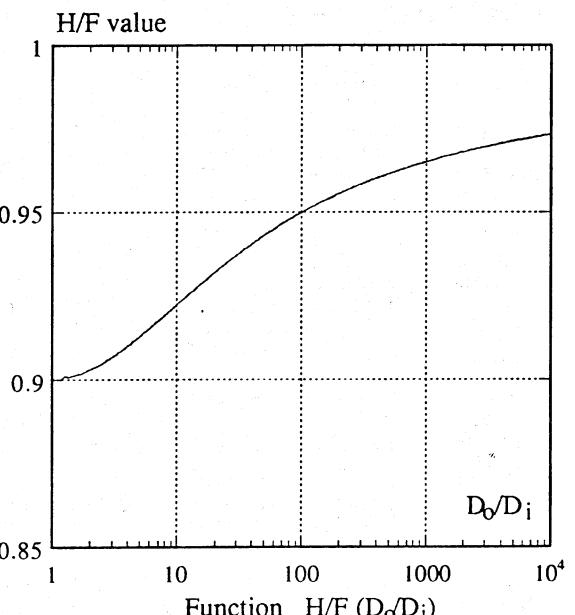
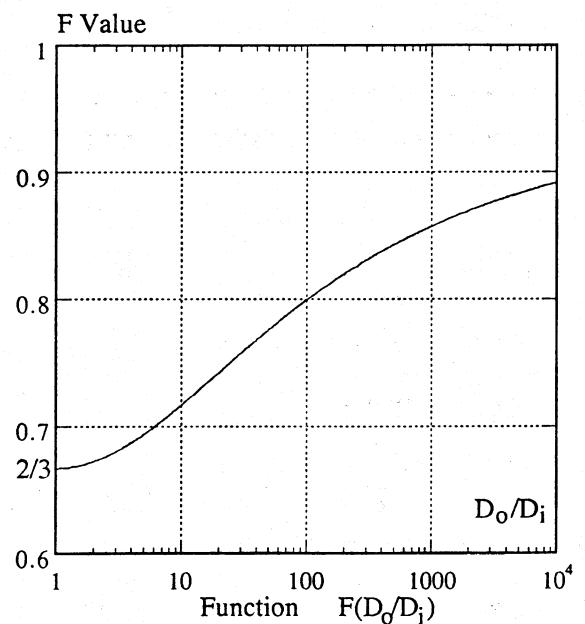


図 5 Constantinou の近似解における定数

8 自由境界面の変形

鉛直軸力を受けたときの積層ゴム支承の自由境界面の変形について考察する。式(21)から次式を得る。

$$u_o(r) = \frac{l^2}{K} \frac{dp}{dr} \quad (54)$$

圧力関数 $p(r)$ は既に求められており、ここでは指數関数による近似式(42)を式(54)に代入して式(55)を得る。

$$u_o(r) = l \varepsilon_c \left[A_1 \exp\left(\frac{r}{l}\right) - A_2 \exp\left(-\frac{r}{l}\right) \right] \quad (55)$$

計測可能な外周の最大膨み量 u_{max} は係数を代入して整理すると次式となる。

$$u_{max} = u_o(R_o) = l \varepsilon_c \frac{\exp(\lambda_o) - \exp(\lambda_i)}{\exp(\lambda_o) + \exp(\lambda_i)} \quad (56)$$

円形断面形状の積層ゴム支承の場合を考察すると(図6)、式(56)の意味が明解になる。円形断面の場合は次式を得る。

$$u_{max} = l \varepsilon_c \frac{\exp(\lambda_o) - 1}{\exp(\lambda_o) + 1} \quad (57)$$

もしも、ゴム層厚が直径に比べて十分に薄いときは ($\lambda_o \geq 3$ 程度の場合) 次の近似が成立する。

$$u_{max} = l \varepsilon_c = \frac{t \varepsilon_c}{\pi} \sqrt{\frac{K + 2G}{G}} \quad (58)$$

従来の非圧縮性を仮定した場合の評価式としては、次式がよく用いられる。

$$u_{max} = \frac{3}{4} R_o \varepsilon_c \quad (59)$$

式(58)と式(59)の違いから以下の点が判る。積層ゴムの半径 R_o が、積層ゴム1層の厚み t の約20倍前後の値を越える限りから、両者の値は逆転する。大型の積層ゴム支承で、もし精度よく膨らみ量を測定することができたとすればその値は従来式(59)で考えられていたほど大きくはなく、かなり少なめの値になる。そのため、従来式を基にこの観測結果を説明しようとすれば、ゴムの体積弾性係数を低く見積らなければならない。また、断面の大きさが同じでゴム層厚が異なる試験体を観測すれば、従来式(59)では差がないが、式(58)では厚みによって差がある。これを従来式を基に説明しようとすれば、スケール効果があるようと思われる。実際は、体積弾性係数が小さいためでも、スケール効果のためでもない。断面の中央部分と自由境界面付近では圧縮応力分布が異なることが原因である。圧縮力は自由境界面近傍で小さいから、自由境界面近傍の変形も当然小さくなるのである。

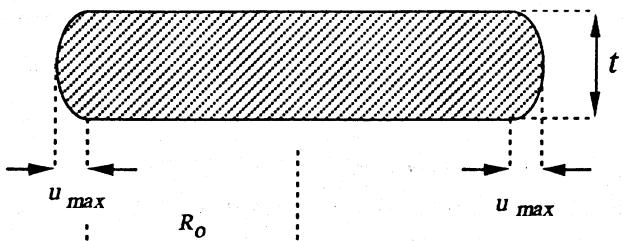


図 6 円形断面の自由境界面の膨らみ変形

9 結 語

中空断面形状を有する積層ゴム支承の鉛直剛性を微小変形の弾性理論の範囲でより精密に調べ、得られた結果が従来の評価式に比較して約20%低い剛性を与えることを解析的に示した。また、ゴムの厚みや中空断面の大小によらず適用できる精度の高い近似解を示した。更に、自由境界面の変形について検討し、従来考えられていた値よりも小さいことを解析的に示した。今後、実験により理論解を検証していく。

謝 辞

本論文は鹿島建設本店開発プロジェクト「制震構造の開発」の研究成果の一部である。同プロジェクトの進行に当り社内各部担当の方々に貴重な御助言、御協力を頂きました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 高山、森田、多田、"天然ゴム系積層ゴムアイソレータの圧縮限界耐力", 日本建築学会構造系論文集, 第482号 pp.43-51, 1996
- 2) 八坂、水越、飯塚、高林、"形状係数をパラメータとした積層ゴムの限界特性実験(その1、2)", 日本建築学会大会学術講演梗概集, Vol-B, pp.599-602, 1991
- 3) 瓜生、西川、"免震用積層ゴムの剛性、変形及び限界特性に関する研究", 日本建築学会構造系論文集, 第477号 pp.31-37, 1995
- 4) 川村、前林、その他"多段積層ゴムを用いたチューンドマスダンパーの適用(その1、2)", 日本建築学会大会学術講演梗概, Vol.B, pp.1065-1068, 1992
- 5) 坂本、佐々木、小鹿、西村、大類、飯塚 "中空積層ゴムの加力実験", 日本建築学会大会学術講演梗概, Vol.B pp.715-716, 1992

- 6) Gent,A.N., Lindley,P.B., "The Compression of Bonded Rubber Blocks," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol.173, No.3, pp.111-117, 1959
- 7) Chalhoub,M.S., Kelly,J.M., "Effect of Bulk Compressibility on the Stiffness of Cylindrical Base Isolation Bearings," Int. J. Solids Structures Vol.26, No.7, pp.743-760, 1990
- 8) Constantinou,M.C., Kartoum,A., Kelly,J.M., "Analysis of Compression of Hollow Circular Elastomeric Bearings," Eng. Struct. Vol.14, No.2, pp.103-111, 1992

記号

D_i	: 中空積層ゴム支承の直径 (内径)
D_o	: 中空積層ゴム支承の直径 (外径)
$e(r,z)$: ゴムの体積ひずみ
E_c	: 積層ゴムの鉛直剛性係数としてのヤング率
F	: 摂動法で得た係数 (図5)
G	: ゴム材料のせん断弾性係数
H	: 摂動法で得た係数 (図5)
I_0	: 第1種の変形ベッセル関数 (オーダーゼロ)
I_1	: 第1種の変形ベッセル関数 (オーダー1)
K	: ゴム材料の体積弾性係数

K_o	: 第2種の変形ベッセル関数 (オーダーゼロ)
K_1	: 第2種の変形ベッセル関数 (オーダー1)
l	: 積層ゴム固有の基準化された厚み、次式で定義される。
	$l = \left(\frac{t}{\pi} \right) \sqrt{\frac{K + 2G}{G}}$
N	: 積層ゴム支承に作用する鉛直軸力
$p(r)$: ゴム層内部の圧力関数
$p_o(r)$: Chalhoub らの求めた平均圧力関数
R_i	: 中空積層ゴム支承の半径 (内径)
R_o	: 中空積層ゴム支承の半径 (外径)
S	: 形状係数、次式で定義される。 $S = \frac{D_o - D_i}{4t}$
t	: ゴム単層の厚み
$u(r,z)$: ゴム層の動径方向変位
$u_o(r)$: ゴムの動径方向の膨らみ変形
u_{\max}	: ゴム層の動径方向の最大変形
$w(r,z)$: ゴム層の厚み方向変位
ε_c	: ゴム層の厚み方向ひずみ
λ_i	: 積層ゴム固有の基準化された内径、次式で定義される。
	$\lambda_i = \frac{R_i}{l}$
λ_o	: 積層ゴム固有の基準化された外径、次式で定義される。
	$\lambda_o = \frac{R_o}{l}$

(1997年5月22日原稿受理, 1997年10月7日採用決定)