

## 中空断面を有する積層ゴム支承の曲げ剛性に関する解析的研究

ANALYTICAL STUDY ON THE BENDING STIFFNESS  
OF HOLLOW CIRCULAR RUBBER BEARINGS

西村 功

Isao NISHIMURA

Discussed in this paper is the bending moment supporting mechanism of laminated rubber bearings with a hollow circular section. The flexure stiffness of the hollow circular rubber bearing is analytically studied. The followings are the key issues discussed in this paper. (1) Derivation of the general governing equation that determines the distribution of pressure inside of the laminated rubber material. (2) Evaluation of the effect of bulk modulus on the bending stiffness. (3) Proposition of a simple formula that is close to the rigorous solution. (4) Discussion of the performance of hollow circular sections based on the analytical solutions.

*Keywords:* rubber bearing, base isolation, bending stiffness, bulk modulus, Bessel function, inverse method

積層ゴム、免震構造、曲げ剛性、体積弾性係数、ベッセル関数、逆解析法

## 1 序 論

免震構造に使用される積層ゴム支承の力学特性については既に多くの研究がなされており、通常の建物免震に用いられる積層ゴム支承については、実用範囲内でほぼその力学特性が判明している。一般に、積層ゴムの設計に当っては、その水平変形能力とともに座屈安定性が重要な要素である。水平変形能力は最終的にはゴムのせん断変形能力に依存するので、積層ゴムの厚みの総和に依存する。

しかし、積層ゴム支承の高さが増すと座屈安定性は損なわれる。このため、水平変形能力を増大させながら、座屈安定性を確保するためには積層ゴム支承の断面形状を大きくすることが必要である。ところが、鉛直軸力が一定の状態では積層ゴム支承の断面積を増大させると、固有周期も短くなるため、予定した応答加速度の低減効果が得られなくなる。

このように、積層ゴム支承の断面形状を円形に限った場合には、ある程度の規模を有する建造物か、または積層ゴム支承の断面積を小さくして変形能力を犠牲にしない限り、長周期の固有周期を持つ振動系を形成することは不可能である。結果として、構造計画の柔軟性と免震構造の適用できる建物規模に一定の限界が生じる。この点を改良するには、断面 2 次モーメントを増大できる中空断面を有する積層ゴム支承（以下、中空積層ゴムと呼ぶ。）が座屈安定性の観点からは有力であるように思われる。しかし、中空積層ゴムのヤング率は中空断面の増大につれて減少する（文献 14, 15, 16）ことが

知られており、中空断面を有することが必ずしも座屈安定性の向上には直結しない。

以上のように、中空積層ゴムには高い座屈安定性と低いせん断剛性を同時に実現できる可能性がある反面、中空断面の選定には注意が必要であることが判る。座屈安定性の評価をするためには中空積層ゴムの曲げ剛性ヤング率を正確に知ることが必須である。著者は、中空積層ゴムの鉛直剛性ヤング率を評価する目的で、逆解析法による応力解析により微小変形弾性理論の範囲で応力の釣り合い式を満足する精密解（文献 15）を求めている。

一方、円形断面の積層ゴムの場合に曲げ剛性ヤング率と鉛直剛性ヤング率を比較すれば、前者は後者よりもかなり小さいことが知られている。例えば、文献 5, 6 によれば、鉛直剛性ヤング率は曲げ剛性ヤング率の約 3 倍程度であるとされている。この事実は、中空積層ゴムのヤング率についても当てはまるのであろうか。現在に至るまで、この問題に対する明確な解答は得られていない。従来、中空断面積層ゴムの曲げ剛性評価が困難であった最大の理由は、ゴム材料の水平変形についての仮定が曖昧であったことにある。本論文の主題はこの点を解明することにある。

本論文では、捩れを伴わないゴムの水平変位分布状態では、体積ひずみだけを用いて、水平方向の釣り合い式を求めることができることを示し、この釣り合い式より、中空断面積層ゴムの曲げ剛性を求めたものである。

## 2 曲げ剛性に関する既往の研究（円形断面の場合）

積層ゴム支承の曲げ剛性と鉛直剛性のヤング率が互いに異なることを最初に指摘したのは Gent（文献 5）である。彼は、服部、武井（文献 17）の鉛直剛性評価式を参考にして、曲げ変形に関する縦弾性係数を式（1）で表現した。式（1）は最初の論文では約 0.5 と記されており（文献 5）、座屈実験によりこの値を推定している。その後、ゴムの非圧縮性を仮定し円形断面以外の形状についても理論的に考察した（文献 6）。しかし、円形断面のは 2/3 と記されているのみで実験値との比較考察は無い。

$$E_b = 3G(1 + \beta S^2) \quad (1)$$

$$S = \frac{D}{4t} \quad (2)$$

ただし、

- $D$  : 円形断面積層ゴム支承の直径
- $t$  : 積層ゴム 1 層の厚み
- $E_b$  : ゴム 1 層の曲げ剛性としてのヤング率
- $G$  : ゴム材料のせん断弾性係数
- $S$  : 形状係数、式（2）で定義される

式（1）がゴムの圧縮性を考慮していないため、薄い積層ゴム支承の解析は主として数値解析（差分法、エネルギー法）に頼らざるを得なかった（文献 8, 9）。Lindley はゴムの圧縮性を考慮した上でエネルギー積分を停留化する方法（リッツ法）により鉛直剛性と曲げ剛性のヤング率を解析的に評価した（文献 10, 11）。曲げ剛性のヤング率は非圧縮のときには が 2/3 になること、鉛直剛性の場合と同様に積層ゴムが薄くなると体積弾性係数に収束すること、などの重要な結果を解析的に指摘し、やや複雑ながら近似式も提案している。

その後、式（1）は多くの研究者から繰り返し引用され一般的に多用される評価式となった（文献 1, 12）。藤田（文献 18）らは、鉛直剛性の評価式と同様に曲げ剛性のヤング率の評価式として、簡便な式（3）を推奨した。藤田らも として 2/3 を採用している。

$$E_b = \left( \frac{1}{3G(1 + \beta S^2)} + \frac{1}{K} \right)^{-1} \quad (3)$$

ただし、

- $K$  : ゴム材料の体積弾性係数

体積弾性係数の影響を弾性理論の立場から純粋に検討したのは Chalhoub, Kelly（文献 2, 3）らである。彼らは、体積弾性係数を考慮した圧縮力に関する支配方程式を導き曲げ剛性についても考察を加えた。また、円形断面においてゴムの圧縮性を考慮して、式（4）による評価式で、 は 2/3 とした。ただし、式（4）は、形状係数  $S$  の増大とともに誤差が拡大し、かつ、体積弾性係数  $K$  に収束しない。

$$E_b = 3G\beta S^2 \left( 1 - \frac{3GS^2}{K} \right) \quad (4)$$

同じころ、Stanton（文献 13）らは曲げ剛性を実験的に確かめようと試みた。彼等は、式（3）で評価した曲げ剛性と Haringx の曲げ-せん断モデル（文献 7）を用いて予測した座屈荷重の実験値と、曲げモーメント-回転変形の実測値を比較検討した。しかし、両者の違いは大きく、実験値と理論値の差異を説明できなかった。

以上のように、積層ゴム支承の曲げ剛性式（3）と座屈実験から確認された値には有意な差があり、曖昧さが残ったまま現在に至っている。しかも、中空積層ゴム支承の曲げ剛性に関する研究は見当たらない。一般的に曲げ剛性の理論的評価を困難にしている理由は、3次元でゴムの変位を正確に評価することが求められるからである。ゴムの変位が曲げ剛性に影響を与える物理的な理由は以下の通りである。

ゴム材料が流体的な自由変形を行うと仮定すれば、曲げ剛性は極めて低くなる。なぜなら、曲げモーメントによる回転角が生じるとき、ゴム単層の体積変化は全体としてはゼロとなるからである（図 1）。逆に、ゴム材料の変形が局所的な拘束を受けるならば、曲げ剛性のヤング率は高くなるはずである。従って、曲げ剛性を正確に評価するためには、ゴム層内部における水平方向の変形を正しく評価することが必要である。既往の研究で考察が不足していた部分はこの点にある。本論文では、水平面内のゴム変位に着目し、体積ひずみと水平変位の関係を明らかにする。水平面内のゴムの変形に捩れが生じていない場合、水平面内の応力の釣り合い式が体積ひずみで表現できることを示し、この釣り合い式から積層ゴムの曲げ剛性を求めることとする。

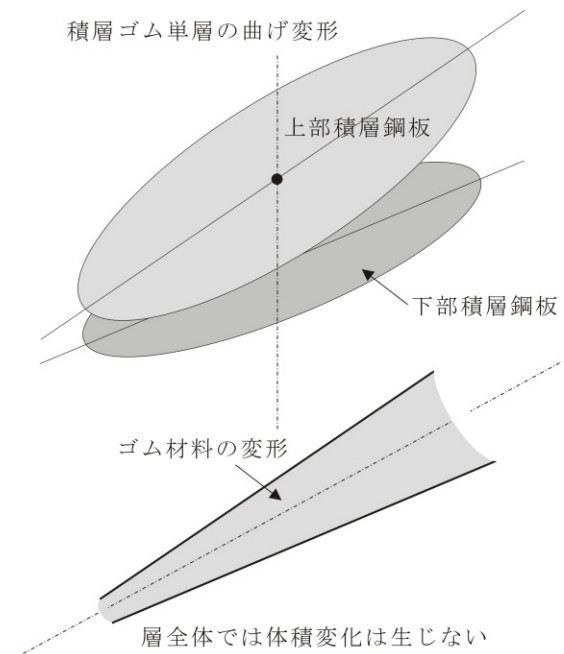


図 1 積層ゴム単層の曲げ変形

### 3 釣り合い方程式と体積ひずみ

本論文では有限の厚みを持つ物体の両端に強制変形を与え、その結果として反力（曲げモーメントや軸力）が発生した場合を想定する（図1はこの例）。この変形と反力の比率を求めれば、曲げ剛性としてのヤング率を求めることができる。まず、解析対象としての中空積層ゴムの基本形状を図2に示す。このとき、ゴム1層分を取り出し、 $x$ 方向の変位を $u_x$ 、 $y$ 方向の変位を $u_y$ 、 $z$ 方向の変位を $u_z$ と表す。

$$x \text{ 方向変位: } u_x(x, y, z) \quad (5)$$

$$y \text{ 方向変位: } u_y(x, y, z) \quad (6)$$

$$z \text{ 方向変位: } u_z(x, y, z) \quad (7)$$

一般的に、体積ひずみは式(8)で、鉛直ひずみは式(9)でそれぞれ与えられる。

$$e(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \varepsilon_z \quad (8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (9)$$

ここで、3次元微小変形を仮定したときの釣り合い式を変位で表すと一般的に次式を得る。

$$(K+G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (10)$$

$$(K+G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (11)$$

$$(K+G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (12)$$

ここで、 $K$ はラメの定数と呼ばれているが、ゴム材料の場合には体積弾性係数にほぼ等しいと考えることができる。

本論文では、外力として純曲げモーメントを作用させた場合を想定している。従って、水平変位には積層方向( $z$ )を軸とした回転変位(ねじれ)は存在しないので、次の条件を設定することができる。

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

従って、体積ひずみと鉛直ひずみの間には式(8)の他にもう一つ別の関係を設定することができる。これが、式(14)である。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (e - \varepsilon_z) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} (e - \varepsilon_z) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \end{cases} \quad (14)$$

式(14)を考慮すると、平面内の釣合方程式(10)、(11)から式(15)を得る。

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{G}{K+2G} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{G}{K+2G} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

式(8)と式(15)から水平変位を消去し、体積ひずみと鉛直ひずみの関係式(16)を得る。

$$(K+2G) \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) = G \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \right) - G \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e - \varepsilon_z) \quad (16)$$

式(16)は水平面内の釣り合い式であり、鉛直方向の釣り合い方程式は(12)である。これらの方程式を円筒座標系で表し、体積ひずみを変数とする方程式に変換し、精密解を求めることとする。

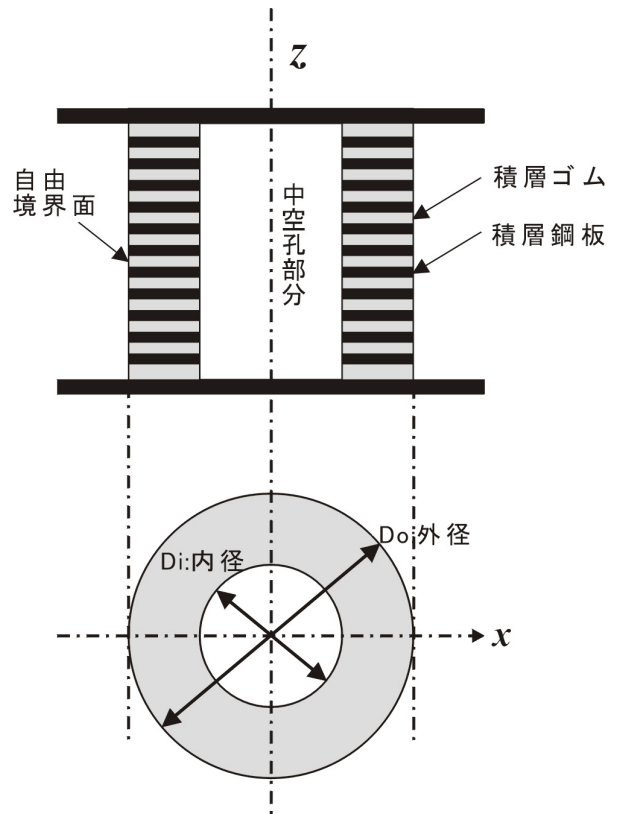


図2 中空積層ゴムの基本形

#### 4 円筒座標系における釣り合い式

円筒座標系における積層ゴムの変形をそれぞれ次式で表す。

$$r \text{ 方向変位: } u_r(r, \theta, z) \quad (17)$$

$$\theta \text{ 方向変位: } u_\theta(r, \theta, z) \quad (18)$$

$$z \text{ 方向変位: } u_z(r, \theta, z) \quad (19)$$

釣り合い方程式(16)は式(20)で表される。

$$(K+2G)\left(\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2}\right) = G\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2}\right) - G \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e - \varepsilon_z) \quad (20)$$

体積ひずみは式(8)の代わりに、次式で与えられる。

$$e(r, \theta, z) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (21)$$

一方、鉛直ひずみは式(9)同様、次式で与えられる。

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (22)$$

式(21)、(22)より式(23)を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (e - \varepsilon_z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (23)$$

式(23)を式(20)に代入すると式(24)を得る。式(24)は捩れ変形が生じないと仮定した以外は、微小変形弾性理論の範囲内で、常に成立する水平面内の釣り合い式である。

$$(K+2G)\left(\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2}\right) - G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (24)$$

ここで、図3を参照して、ゴム単層の変形を式(25)、(26)、(27)と仮定する。これらの仮定した変形が式(24)を満足すれば、仮定した変形は正解と考えられる。(逆解析法)

$$r \text{ 方向変位: } u_r(r, \theta, z) = u_r^*(r) \cos \theta \cos \left( \frac{\pi}{t} z \right) \quad (25)$$

$$\theta \text{ 方向変位: } u_\theta(r, \theta, z) = u_\theta^*(r) \sin \theta \cos \left( \frac{\pi}{t} z \right) \quad (26)$$

$$z \text{ 方向変位: } u_z(r, \theta, z) = \frac{\alpha}{t} r z \cos \theta \quad (27)$$

式(25)、(26)から式(28)を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = - \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (28)$$

式(27)を式(24)に代入し式(28)を考慮すると、体積ひずみと鉛直ひずみが水平面内で満足すべき釣り合い式(29)が得られる。

$$\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = \frac{1}{l^2} (e - \varepsilon_z) \quad (29)$$

但し、ここで次の定数を導入した。

$$l = \frac{t}{\pi} \sqrt{\frac{K+2G}{G}} \quad (30)$$

式(29)に式(27)を代入すると体積ひずみに関する平面内での釣り合い式を得る。

$$\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} - \frac{e}{l^2} = - \frac{\alpha}{l^2} \frac{r}{t} \cos \theta \quad (31)$$

一方、鉛直方向の釣り合い式(12)を円筒座標系で表すと、次式を得る。

$$(K+G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (32)$$

式(27)を代入すると体積ひずみが鉛直方向について満足すべき釣り合い式を得る。

$$\frac{\partial e}{\partial z} = 0 \quad (33)$$

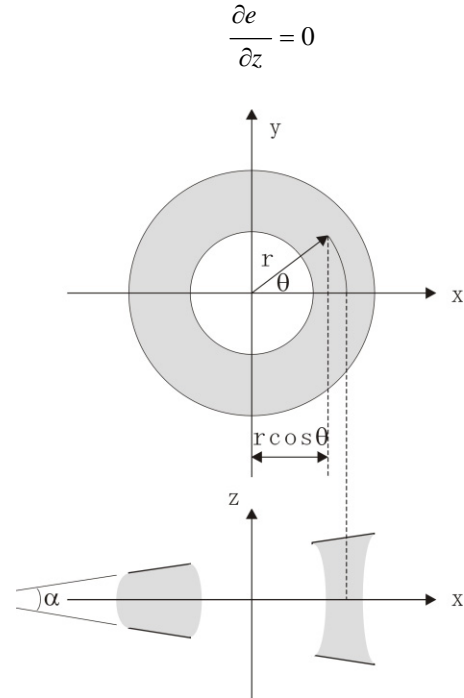


図 3 積層ゴム単層の変形

そこで、体積ひずみを式(34)で仮定する。式(34)は鉛直方向の釣り合い式(33)を満足する。さらに、式(34)が水平方向の釣り合い式(31)を満足することを検討する。

$$e(r, \theta, z) = e_o(r) \cos \theta \quad (34)$$

式(34)を式(31)に代入すると式(35)を得る。

$$\frac{d^2 e_o}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{de_o}{dr} - \left( \frac{e_o}{r^2} + \frac{e_o}{l^2} \right) = -\frac{\alpha}{l^2} \frac{r}{t} \quad (35)$$

式(35)の解は変形ベッセル関数とする。

$$e_o(r) = \left( \frac{\alpha l}{t} \right) \left( C_1 I_1 \left( \frac{r}{l} \right) + C_2 K_1 \left( \frac{r}{l} \right) + \frac{r}{l} \right) \quad (36)$$

ここで、

$I_1$  : 第1種の変形ベッセル関数 (オーダー: 1)

$K_1$  : 第2種の変形ベッセル関数 (オーダー: 1)

応力の境界条件は、積層ゴムの自由境界面で与えられ、動径方向の主応力がゼロであることが条件となる。

$$\sigma_r = 2G \frac{\partial u_r}{\partial r} + Ke = 0 \quad \text{at } r = R_i, R_o \quad (37)$$

ここで式(37)を体積ひずみで表現するために、釣り合い式(15)を円筒座標系で表すと次式を得る。

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{G}{K+2G} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} \right) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \frac{G}{K+2G} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

式(38)の第1式に、式(25)、(26)、(27)を代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (39)$$

従って、応力の境界条件式(37)は、式(40)で表される。

$$2Gl^2 \frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + Ke = 0 \quad \text{at } r = R_i, R_o \quad (40)$$

式(40)を用いると式(36)における積分定数  $C_1, C_2$  は以下の連立1次方程式から求められる。

$$\begin{pmatrix} 2 \frac{G}{K} I_1''(\lambda_i) + I_1(\lambda_i) & 2 \frac{G}{K} K_1''(\lambda_i) + K_1(\lambda_i) \\ 2 \frac{G}{K} I_1''(\lambda_o) + I_1(\lambda_o) & 2 \frac{G}{K} K_1''(\lambda_o) + K_1(\lambda_o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_i \\ -\lambda_o \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\text{ただし、} \quad \lambda_o = \frac{R_o}{l} \quad \text{and} \quad \lambda_i = \frac{R_i}{l} \quad (42)$$

以上で、釣り合い式を満足する体積ひずみを求めることができた。次に、積層ゴムの両端部における鉛直方向応力を求め、反力としての曲げモーメントを求めることができる。

$$\sigma_z = \left( 2G \frac{\alpha}{t} r + Ke_o(r) \right) \cos \theta \quad (43)$$

曲げモーメントは式(43)を全断面積で積分すると求まる。

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \sigma_z r^2 \cos \theta \, dr d\theta \quad (44)$$

上記積分を実行し、曲げモーメントを求める。曲げ剛性としてのヤング率は、式(45)で定義することができる。

$$\frac{M}{E_b I} = \frac{\alpha}{t} \quad (45)$$

最終的に曲げ剛性のヤング率  $E_b$  は式(46)で計算される。

$$E_b = 2G + K + \frac{4K}{\lambda_o^4 - \lambda_i^4} \int_{\lambda_i}^{\lambda_o} (C_1 I_1(x) + C_2 K_1(x)) x^2 dx \quad (46)$$

上記の積分を実行し、定数  $C_1, C_2$  などを式(41)から決定すれば、曲げ剛性ヤング率は式(47)で与えられる。

$$E_b = 2G + K + \frac{4K}{\lambda_o^4 - \lambda_i^4} \left( C_1 (\lambda_o^2 I_2(\lambda_o) - \lambda_i^2 I_2(\lambda_i)) + C_2 (\lambda_i^2 K_2(\lambda_i) - \lambda_o^2 K_2(\lambda_o)) \right) \quad (47)$$

ここに示した方法に従えば円形断面積層ゴム支承の曲げ剛性も評価できる。円形断面の場合は中心部分の圧縮応力が無限大になることはない。そこで、積分定数の  $C_2$  はゼロとなる。従って、応力の境界条件は外周部分のみで与えられ、これより  $C_1$  を決定する。結果を、式(48)、(49)に示す。

$$E_b = 2G + K + \frac{4KC_1}{\lambda_o^4} \int_0^{\lambda_o} I_1(x) x^2 dx \quad (48)$$

$$\text{ただし、} \quad C_1 = - \left( \frac{2K}{G} \right) \frac{\lambda_o}{I_3(\lambda_o) + \left( 3 + 2 \frac{K}{G} \right) I_1(\lambda_o)} \quad (49)$$

積分を実行すれば、円形断面の曲げ剛性ヤング率が求まる。

$$E_b = 2G + K - \frac{\left( \frac{8K}{G\lambda_o} \right) I_2(\lambda_o)}{I_3(\lambda_o) + \left( 3 + 2 \left( \frac{K}{G} \right) \right) I_1(\lambda_o)} \quad (50)$$

## 5 数値解析による検討

本論文で求めた円形断面積層ゴムの曲げ剛性ヤング率(50)と、従来一般的に用いられている曲げ剛性ヤング率の評価式(3)の両者を比較する。一例として、体積弾性係数  $K$  を  $2000 \text{ N/mm}^2$  とし、せん断弾性係数  $G$  を  $0.5 \text{ N/mm}^2$  とした。ゴム層の半径  $R_o$  を  $500 \text{ mm}$  とし、ゴム単層の厚み  $t$  を  $25 \text{ mm}$  以下の範囲で変化させた場合の、式(50)と式(3)の比較を図4に示す。従来式は精密解に比較して、最大で2割程度大きな値を示す。この結果は、円形断面積層ゴム支承の場合にも、曲げ剛性評価式に若干の修正が必要であることを示している。

中空積層ゴムの曲げ剛性は、本論文の主題である。本論文で求めた解(47)と、文献(15)で求めた鉛直剛性のヤング率の解(51)を比較検討すると円形断面積層ゴム支承と中空断面積層ゴム支承の定性的な違いが明瞭となる。鉛直剛性のヤング率は結果のみを文献15より引用し式(51)に示す。

$$E_c = 2G + K + \frac{2K}{\lambda_o^2 - \lambda_i^2} \times \left( \begin{array}{l} B_1 (\lambda_o I_1(\lambda_o) - \lambda_i I_1(\lambda_i)) \\ + B_2 (\lambda_i K_1(\lambda_i) - \lambda_o K_1(\lambda_o)) \end{array} \right) \quad (51)$$

ただし、

$$\frac{2G}{K + 2G} \left( \begin{array}{l} \frac{I_1(\lambda_i)}{\lambda_i} - \frac{K_1(\lambda_i)}{\lambda_i} \\ \frac{I_1(\lambda_o)}{\lambda_o} - \frac{K_1(\lambda_o)}{\lambda_o} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} I_o(\lambda_i) & K_o(\lambda_i) \\ I_o(\lambda_o) & K_o(\lambda_o) \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} K \\ K + 2G \\ K \end{array} \right) \quad (52)$$

さまざまな中空断面の大きさに対し積層ゴムの厚みを変化させて曲げ剛性と鉛直剛性のヤング率を比較検討した結果を図5に示す。この解析例では、せん断弾性係数  $G$  を  $0.5 \text{ N/mm}^2$  とし、体積弾性係数  $K$  を  $2000 \text{ N/mm}^2$  とした。ゴム層の半径  $R_o$  を  $500 \text{ mm}$  とし、内径  $R_i$  を連続的に変化させてヤング率を調べた。

中空断面の増大に伴って、曲げ剛性ヤング率と鉛直剛性ヤング率の差は小さくなる。言い換えれば、中空断面の大きい積層ゴム支承では、曲げ剛性ヤング率と鉛直剛性ヤング率とは、ほぼ等しい。この結果は大変興味深い。中空積層ゴム支承では、圧縮縁と引張縁は互いに切り離されているため、円形断面積層ゴムとは異なり、圧縮側から引っ張り側へゴムが自由に移動できない。そのため、材料の変形が制限されて、曲げ剛性ヤング率と鉛直剛性ヤング率の値がほぼ等しくなったものと考えられる。

これらの数値解析結果から、次のような有益な推論が可能となる。従来は、中空断面積層ゴムの曲げ剛性は極めて低いと考えられていたため、座屈安定性が低く実用的でないと退けられていた。しかし、中空断面の形状が直径の約半分程度の大きさであれば、曲げ剛性ヤング率の減少は少ない。むしろ、中空断面の場合は断面2次モーメントが大きく、座屈安定性の観点からは有利となる可能性がある。

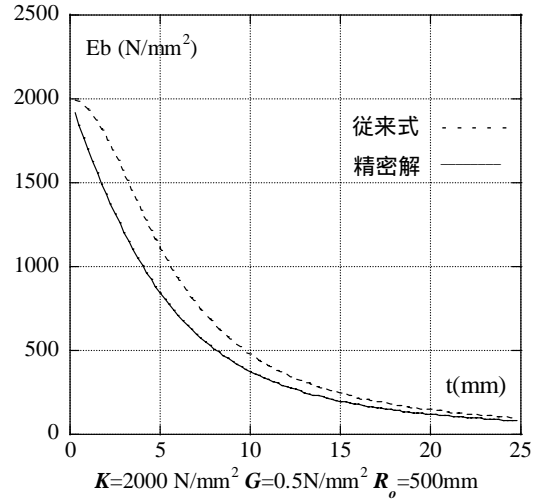


図4 従来式(3)と精密解(50)の比較

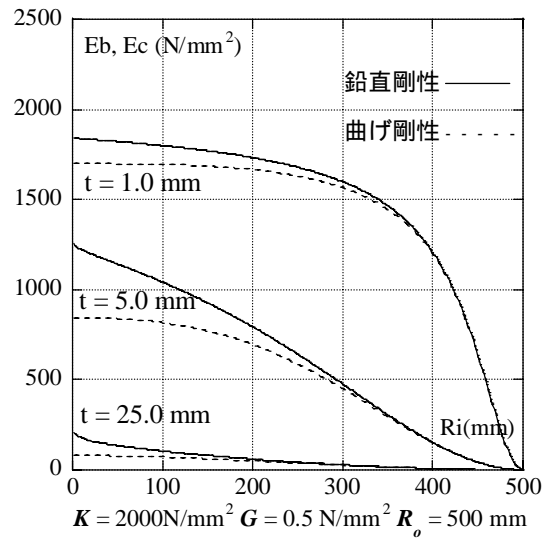


図5 鉛直剛性ヤング率と曲げ剛性ヤング率の比較

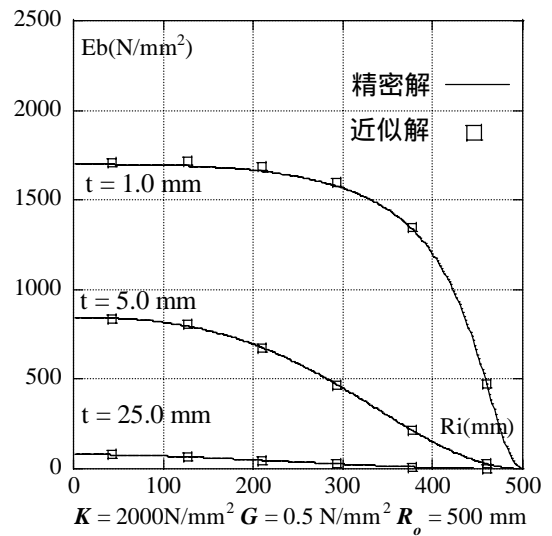


図6 曲げ剛性ヤング率の近似式とその精度

さらに、図5に示す結果から、中空断面が直径の約半分よりも大きい場合は $E_c$ と $E_b$ は、ほぼ等しいことが判る。ところで、中空積層ゴム支承の鉛直剛性ヤング率 $E_c$ については、指数関数を用いた高精度の近似式が得られている(文献15)。

$$E_c = 2G + K + \frac{2(K - 2G) \exp(\lambda_i) - \exp(\lambda_o)}{\lambda_o - \lambda_i \exp(\lambda_i) + \exp(\lambda_o)} \quad (53)$$

この近似解には、ゴムの厚み、内径外径の大きさ、せん断剛性と体積弾性係数などさまざまな影響が考慮されており、ヤング率の大きな領域から小さな領域まで高精度で近似できることが調べられている。換言すれば、式(51)は式(53)で高精度の近似ができる。そこで、指数関数による鉛直剛性の近似解と曲げ剛性の解(47)を比較することにより、曲げ剛性の近似解を次式で表現することとした。

$$E_b = 2G + K + \psi(\lambda_i, \lambda_o) \frac{2(K - 2G) \exp(\lambda_i) - \exp(\lambda_o)}{\lambda_o - \lambda_i \exp(\lambda_i) + \exp(\lambda_o)} \quad (54)$$

中空断面が大きくなると圧縮縁は一樣な圧縮力を受け、引張縁は一樣な引張力を受けるようになる。従って、鉛直剛性のヤング率と曲げ剛性のヤング率は等しくなる。これが図5の物理的な意味である。従って、式(54)で導入した係数 $\psi$ はこの場合ほとんど1.0に等しい。一方、 $\lambda_i$ がゼロの場合は円形断面を表すが、このとき $\psi(\lambda_i, \lambda_o)$ は $\lambda_o$ のみに依存し、 $\lambda_o$ が増大するにつれて、2.0に収束することが数値計算の結果判明した。これらの結果を基に、多項式で表現できる式(55)を近似式として提案する。

$$\psi(\lambda_i, \lambda_o) = \frac{(\lambda_o - \lambda_i)^3}{(\lambda_o^2 + 25)(\lambda_o + \lambda_i)} + 1 \quad (55)$$

次に、式(55)と精密解(47)を比較検討する。一例として、積層ゴムの厚みを一定にした状態で、中空断面の大きさを变化させた場合の精密解と近似解の比較を図6に示す。両者はほぼ一致する。実際、 $\lambda_o$ と $\lambda_i$ を变化させてさまざま比較検討したが、結果的に誤差は±5%程度の範囲内に収まっている。ただし、この近似式はゴム材料のようにせん断弾性係数が体積弾性係数に比較して極端に小さい場合にのみ用いることができる。

## 6 結 語

本論文の解析結果より、以下の諸点が導かれた。今後は、実験による検証を行い、解析結果の妥当性を見極める。

1. 中空積層ゴム支承のゴム単層の曲げ剛性評価式が得られた。
2. 円形断面の積層ゴム支承の曲げ剛性は、一般的に用いられる評価式で推定される値よりも、若干低い値となる。
3. 中空断面が比較的大きい中空積層ゴム支承では、ゴム層の曲げ剛性ヤング率と鉛直剛性ヤング率はほぼ等しい。

## 参考文献

- [1]Buckle, I.G., Kelly, J.M., "Properties of Slender Elastomeric Isolation Bearings during Shake Table Studies of a Large-Scale Model Bridge Deck," Joint Sealing and Bearing Systems for Concrete Str., ACI, vol.1, pp.247-269, 1986
- [2]Chalhoub, M.S., Kelly, J.M., "Effect of Bulk Compressibility on the Stiffness of Cylindrical Base Isolation Bearings," Int. J. Solids Structures, Vol.26, No.7, pp.743-760, 1990
- [3]Chalhoub, M.S., Kelly, J.M., "Analysis of Infinite Strip Shaped Base Isolator with Elastomer Bulk Compression," Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.117, No.8, pp.1791-1805, 1991
- [4]Constantinou, M.C., Kartoum, A., Kelly, J.M., "Analysis of Compression of Hollow Circular Elastomeric Bearings," Eng. Struct. Vol.14, No.2, pp.103-111, 1992
- [5]Gent, A.N., "Elastic Stability of Rubber Compression Springs," Journal Mechanical Engineering Science, Vol.6, No.4, pp.318-326, 1964
- [6]Gent, A.N., Meinecke, E.A., "Compression, Bending, and Shear of Bonded Rubber Blocks," Polymer Engineering and Science, Vol.10, No.1, pp.48-53, 1970
- [7]Haringx, J.A., "On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings," Phillips Research Report, Vol.4, pp.49-80, 1949
- [8]Holownia, B.P., "Effect of Poisson's Ratio on Bonded Rubber Blocks," Journal of Strain Analysis, Vol.2, pp.236-242, 1972
- [9]Lindley, P.B., "A Finite Element Programme for the Plane Strain Analysis of Rubber," Journal of Strain Analysis, Vol.10, pp.25-31, 1975
- [10]Lindley, P.B., "Compression Moduli for Blocks of Soft Elastic Material Bonded to Rigid End Plates," Journal of Strain Analysis, Vol.14, No.1, pp.11-16, 1979
- [11]Lindley, P.B., "Plane Strain Rotation Moduli for Soft Elastic Blocks," Journal of Strain Analysis, Vol.14, No.1, pp.17-21, 1979
- [12]Lindley, P.B., "Natural Rubber Structural Bearings," Joint Sealing and Bearing Systems for Concrete Structure, ACI, Vol.1, pp.353-378, 1981
- [13]Stanton, J.F., Scroggins, G., Taylor, A.W., Roeder, C.W., "Stability of Laminated Elastomeric Bearings," Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.116, No.6, p.1351-1371, 1990
- [14]坂本、佐々木、小鹿、西村、大類、飯塚、"中空積層ゴムの加力実験"、日本建築学会大会梗概集、Vol. B, 1992
- [15]西村、山田、坂本、近藤、小堀、"中空積層ゴム支承の鉛直剛性に関する解析的研究"、日本建築学会構造系論文集、第505号、pp.61-68, 1998年3月
- [16]西村、山田、坂本、近藤、小堀、"中空積層ゴム支承の鉛直剛性に関する実験的研究"、日本建築学会構造系論文集、第519号、pp.143-150, 1999年5月
- [17]服部、武井、"圧縮ゴム座のバネ常数に就いて"、日本ゴム協会誌、第23巻、第7号、pp.194-198, 1951
- [18]藤田隆史、藤田聡、"重量機器免震用積層ゴムの静的加力実験"、生産研究(東京大学生産技術研究所報)、Vol.38, No.4, pp.189-191, 1986

## 記 号

- $D$  : 円形断面積層ゴムの直径
- $D_i$  : 中空積層ゴム支承の内径(直径)
- $D_o$  : 中空積層ゴム支承の外径(直径)
- $e$  : ゴムの体積ひずみ
- $e_o$  : 変数分離後の体積ひずみ
- $E_b$  : 積層ゴム支承の曲げ剛性としてのヤング率
- $E_c$  : 積層ゴム支承の鉛直剛性としてのヤング率
- $G$  : ゴム材料のせん断弾性係数
- $I$  : 積層ゴム支承の断面2次モーメント
- $I_o$  : 第1種の変形ベッセル関数(オーダー: 0)
- $I_1$  : 第1種の変形ベッセル関数(オーダー: 1)
- $I_2$  : 第1種の変形ベッセル関数(オーダー: 2)
- $I_3$  : 第1種の変形ベッセル関数(オーダー: 3)
- $K$  : ゴム材料のラメの定数(体積弾性係数にほぼ等しい)
- $K_o$  : 第2種の変形ベッセル関数(オーダー: 0)
- $K_1$  : 第2種の変形ベッセル関数(オーダー: 1)

- $K_2$  : 第 2 種の変形ベッセル関数 (オーダー : 2 )
- $l$  : 積層ゴム固有の基準化された厚み (式 (30) 参照)
- $M$  : 積層ゴム支承に作用する曲げモーメント
- $R_i$  : 中空積層ゴム支承の内径 (半径)
- $R_o$  : 中空積層ゴム支承の外径 (半径)
- $S$  : 形状係数 (式 (2) 参照)
- $t$  : ゴム単層の厚み
- $u_x$  : ゴム層の  $x$  方向の変位
- $u_y$  : ゴム層の  $y$  方向の変位
- $u_z$  : ゴム層の  $z$  方向の変位
- $u_r$  : ゴム層の  $r$  方向の変位
- $u_\theta$  : ゴム層の  $\theta$  方向の変位
- $\alpha$  : 曲げモーメント  $M$  で生じた単層の角度
- $\varepsilon_z$  : ゴム層の厚み方向 ( $z$ ) のひずみ
- $\lambda_i$  : 積層ゴム固有の基準化された内径 (式 (42) 参照)
- $\lambda_o$  : 積層ゴム固有の基準化された外径 (式 (42) 参照)