

非定常不規則外乱下における能動型動吸振器の エネルギー吸収応答

THE ENERGY DISSIPATION RESPONSE OF AN ACTIVE TUNED MASS DAMPER UNDER NON-STATIONARY RANDOM DISTURBANCES

西村 功 *

Isao NISHIMURA

This paper discusses a vibration control algorithm for a tuned mass damper under non-stationary random disturbances. Selecting an appropriate set of passive mechanical parameters under a given feedback gain minimizes the energy requirement for the controller. This optimum selection is probabilistically obtained under stationary random process. It is also proved that the same optimum parameter selection minimizes the force requirement for the controller. The stochastically expected optimum parameter set is numerically evaluated in the time domain under non-stationary random excitations. The deterministic analyses ascertained that the control energy converges to zero as the time goes to infinity under any non-stationary random disturbances.

Keywords: Energy Response, Tuned Mass Damper, Active Control, Stationary Random, Earthquake Response, Damping

エネルギー吸収応答、動吸振器、能動制御、定常不規則外乱、地震応答、減衰

1 序 論

本論文は、建築構造物に設置した能動型動吸振器を対象とし、非定常不規則外乱である地震動に対する制御エネルギー吸収応答について述べたものである。

動吸振器とは、主振動系と別に小型の質量体を付加し、かつその振動周期を調節することにより主振動系の振動抑制を行うものである¹⁾。本論文では、受動型の動吸振器の性能を向上させるために加速度を用いたフィードバック制御を行い、振動数、減衰係数などの諸パラメータを最適値に設定すると共に、確率論的な意味で制御エネルギー吸収応答を最小化する制御則を構成する。制御パラメータを設定した系を作った後、地震動を例とする非定常不規則外乱を与えて能動型動吸振器のエネルギー応答を数値解析する。一連の解析により、地震外乱の規模、スペクトル、対象とする振動系の固有周期などとは無関係に、制御エネルギーを時間の経過と共に完全に消去できる制御アルゴリズムの存在が示される。以上が本論文の要旨である。

制震構造の研究が小堀により提唱されて以降²⁾、能動型の振動制御装置はさまざまな角度から研究されてきた。一方で、地震を対象とした構造安全性を向上させる技術としては、能動型部材は不適切であるという指摘があることも事実である。こうした批判の代表的なものとしては、Akiyama の指摘に見られるように³⁾、能動型の装置では地震時の膨大な入力エネルギーを処理しきれないとする考え方があり。しかし、累積的なエネルギー積分値によって制御装置の損傷を定義すると、これを完全に消去することのできる能動型動吸振器の制御則が、少なくとも理論上は存在するのである。

2 既往の研究

受動型の動吸振器は、Frahm の発明に始まり、Ormondroyd⁴⁾ や Den Hartog¹⁾らによって、いわゆる PQ 点理論による最適化手法が導かれ機械振動の制御では、一般に知られるようになった。

一方、能動型動吸振器の研究はいつ頃から始まったものか、あまり定かではない。著者の知る限りでは、梁の中央部分に小型の質量体を取り付け、フィードバック振動制御を行った Rockwell⁵⁾の研究が最も初期の試みである。その後、Abu-Akeel⁶⁾は、Rockwell と同じ構成の能動型動吸振器でフィードバックを行い、現在ハイブリッド型動吸振器として知られている形式を様々に検討している。明らかに、受動型の動吸振器の延長で能動型の動吸振器を考えており、振動数の同調も行っている。しかし、系統的な最適解を求めるには至らず、様々な可能性を示唆するに留まった。

振動制御にも現代制御理論が適用されるようになると、最適フィードバックゲインを求めることが一般的に行われるようになる。最適解の定式化に際し、フィードバック量として変位と速度を用いることが一般的となった。これは、現代制御理論を適用して LQ レギュレータによる最適解を求めようとする、変位と速度の応答量をフィードバックするのが普通だからである。付加質量体と主振動系のそれぞれの速度と変位をフィードバックすると、2 自由度系の特性方程式の根を如何なるポイントに動かすことも理論上可能となる。Morison⁷⁾は Karnopp とともに、かなり早い時期からこうした試みを行っている。しかし、Morison は受動型の動吸振器と能動型の動吸振器とは全く関連が無いと考えていた。事実、フィードバックゲインに物理的な意味を見出すことはできないと述べている⁷⁾。

建築構造の分野で能動型動吸振器が検討されたのは、John Hancock Tower に設置された油圧アクチュエータ式の受動型動吸振器が、おそらく最初の大型装置である⁸⁾。アクチュエータを用いているが、制御則は純粋に受動型の動吸振器である。このとき、MTSの技術者であったLund⁹⁾は、制御則を変えることで動吸振器の性能を向上させることが比較的簡単に行えることを解析的に予測している。Soong⁹⁾は、このプロジェクトのコンサルタントを行っており、後に能動型動吸振器の研究¹⁰⁾を行う契機となったと考えられる。

我が国の建築分野における能動型質量駆動式の振動制御装置は、成和ビルに設置されたAMD¹¹⁾(アクティブマストライバー)が最初である。小堀らによる地震対応まで考慮した能動型の振動制御装置は、諸外国を含めて大きな反響があった。この振動制御装置は、Soong¹⁰⁾やYang¹²⁾の装置と異なり、同調させない方式で実現されている。1990年代に入ると、様々なグループによる能動型動吸振器の研究^{13),14)}が精力的に展開される。その結果として、制御力や制御エネルギーを小さく抑えることが可能となった。以後、我が国でも現代制御理論による最適制御が一般的に用いられることになった。しかし、一般的な理論体系を動吸振器に応用したため、建物応答変位成分と速度成分を主たるフィードバック量としなければならず、駆動装置の変位が増大する結果となった。これに対し、著者は、建物応答の絶対加速度を主たるフィードバック量とする制御則を示し¹⁵⁾、受動型動吸振器と能動型動吸振器の物理的関連を示した。この制御則の原理を応用した振動制御装置には、文献16などがある。

この制御手法は、絶対加速度を主たるフィードバック量としたり、フィードバックゲインを決定した後に最適パラメータを選定したりするなどの特殊性から、一般性が無いものと考えられてきた。ところが、能動型振動制御による筋交い構造を対象とした研究で、制御エネルギー応答を時間の経過と共に零に収束させることが可能である制御則¹⁷⁾が見つげ出された。本論文で述べる能動型動吸振器の制御則は、この能動型筋交いの制御則と双対の関係にある。

本論文では、如何なるスペクトルを有する非定常不規則外乱下においても、制御エネルギー吸収応答を時間の経過と共に零に収束させることが可能な、能動型動吸振器の制御則を詳述する。

3 加速度制御による能動型動吸振器の最適化

まず、受動型の動吸振器を図1に示す。通常、主振動系(m)と付加質量系(m_d)は、ほぼ同じ固有振動数に調整されている。このため、主振動系の振動エネルギーは付加質量系に移行され順次減衰機構(c_d)によって消費されていき、次第に振動が減少する。しかし、大型の建築構造物では付加質量系の質量比率がたとえ1/100程度であっても、装置はかなり大型となる。そこで、装置を小型化する代わりに付加質量系の動きを増大させて制御効果を上げようとしたものが能動型動吸振器である。

既往の研究で対象となっている能動型動吸振器は、図2に示す構成をしている場合が多い。この構成の能動型動吸振器は、制御効果を犠牲にすることなく制御力を削減できることが知られており、ハイブリッド型動吸振器と呼ばれている。本論文でも、この形式の能動型動吸振器をハイブリッド型制御と定義する。一方、駆動装置のみを有する能動型動吸振器は図3に示す構成となる。本論文では、この形式の能動型動吸振器を直動型動吸振器と定義する。

本節では、まず図3に示す直動型動吸振器の制御方法について述べる。図3に示す直動型動吸振器の運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} m_d(\ddot{y} + \ddot{x}) - u(t) = 0 & (1) \\ m\ddot{x} + k(x - x_G) + u(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

ここでは、地動を含めた絶対変位を x としていることに注意する。地震外乱を単位質量当たりの外力で置き換えて式(3)で代表させる。

$$kx_G(t) = mf(t) \quad (3)$$

制御力 $u(t)$ によって、減衰力と復元力を与えれば、受動型の動吸振器と同じ効果が得られる。そこで、制御則として式(4)を考える。このとき、復元力と減衰力以外に $u_A(t)$ として如何なる制御力を加えるかが重要である。

$$u(t) = -k_A y - c_A \dot{y} + u_A(t) \quad (4)$$

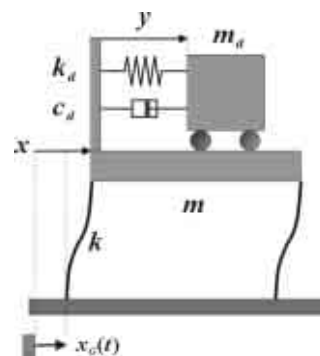


図1 建物構造に設置した受動型動吸振器

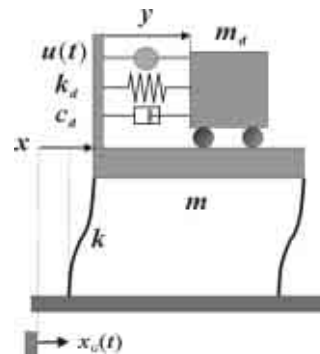


図2 建物構造に設置したハイブリッド型動吸振器

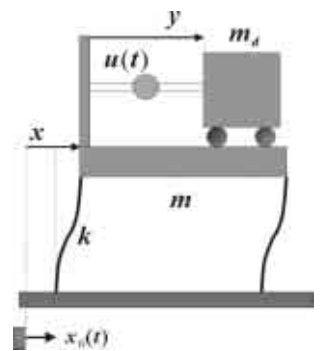


図3 建物構造に設置した直動型動吸振器

式(3)と(4)を式(1)と(2)に代入すると、下式を得る。

$$\begin{cases} m_d \ddot{y} + c_A \dot{y} + k_A y = -m_d \ddot{x} + u_A(t) & (5) \\ (m + m_d) \ddot{x} + kx = mf(t) - m_d \ddot{y} & (6) \end{cases}$$

ここで、直動型特有の制御を行うためには、 $u_A(t)$ の選定が重要となる。純粋に受動型の動吸振器を考えるならば、 $u_A(t)$ は零である。そのとき、式(6)において外乱 $f(t)$ が発生すると、主振動系 x が振動を始める。次に、付加質量系 y が振動を始める。その結果として、付加質量系の慣性力 $-m_d \ddot{y}$ が主振動系に反力として作用するが、応答 x と応答 y には位相差がほぼ 90° あるため、付加質量系の慣性力は主振動系にとっては減衰力として作用する。もしも、付加質量系の振幅を増大させることができれば、主振動系の減衰効果を増大させることができる。そこで、駆動装置を用いて制御力 $u_A(t)$ が、主振動系の加速度 \ddot{x} に比例するようにフィードバックを行えば制御効果の増大を期待することができる。そこで、次のような絶対加速度フィードバックを行う。

$$u_A(t) = -mg_A \ddot{x} \quad (7)$$

また、今後の式展開を考え、下式のパラメータを導入する。

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}; \omega_d = \sqrt{\frac{k_A}{m_d}}; \mu = \frac{m_d}{m}; \eta = \frac{c_A}{2m_d \omega_d}; \xi = \frac{\omega_d}{\omega_o} \quad (8)$$

フィードバック制御の効果が増大すると、振動数比 ξ や減衰率 η の値は受動型動吸振器の最適値と異なるはずである。そこで、絶対加速度フィードバックを行った場合の最適パラメータを求めることとする。式(7), (8)を式(5), (6)に代入しラプラス変換すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} s^2 + 2\omega_d \eta s + \omega_d^2 & (1 + \frac{g_A}{\mu})s^2 \\ \mu s^2 & (1 + \mu)s^2 + \omega_o^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ x(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $x(s), y(s), f(s)$ などは、 $x(t), y(t), f(t)$ のラプラス変換である。従って、伝達関数で表現すれば(10)式を得る。

$$\begin{cases} y(s) = H_Y(s)f(s) \\ x(s) = H_X(s)f(s) \end{cases} \quad (10)$$

伝達関数は下式で与えられる。

$$H_Y(s) = \frac{-(1 + \frac{g_A}{\mu})s^2}{(1 - g_A)s^4 + 2(1 + \mu)\omega_d \eta s^3 + (\omega_o^2 + (1 + \mu)\omega_d^2)s^2 + 2\omega_d \omega_o^2 \eta s + \omega_o^2 \omega_d^2} \quad (11)$$

$$H_X(s) = \frac{s^2 + 2\omega_d \eta s + \omega_d^2}{(1 - g_A)s^4 + 2(1 + \mu)\omega_d \eta s^3 + (\omega_o^2 + (1 + \mu)\omega_d^2)s^2 + 2\omega_d \omega_o^2 \eta s + \omega_o^2 \omega_d^2} \quad (12)$$

今、外乱を定常不規則過程とすれば、不規則変数 X の2乗平均

期待値は式(13)を計算することで求められる。

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} H_X(i\omega)H_X(-i\omega)S_f(\omega)d\omega \quad (13)$$

地震外乱のパワースペクトル $S_f(\omega)$ を S_o (一定) と仮定して、式(13)を計算すると次式を得る。

$$E[X^2] = \frac{\pi S_o}{2(\mu + g_A)\eta\omega_o^3} \left(\frac{4\xi(1 + \mu)\eta^2 + (1 + \mu)^2 \xi^3}{-(2 + \mu - g_A)\xi + \frac{1}{\xi}} \right) \quad (14)$$

式(14)を減衰率 η と振動数比 ξ についての関数と見なせば、応答の2乗平均値には最小値が存在し、最適な減衰率と振動数比は次式から得られる。

$$\frac{\partial E[X^2]}{\partial \xi} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial E[X^2]}{\partial \eta} = 0 \quad (16)$$

式(14)の最小値は、減衰率と振動数比が式(15)と(16)をそれぞれ満足する場合に得られる。この減衰率と振動数比をそれぞれ、最適減衰率と最適振動数比と定義する。ここで、示した最適減衰率と最適バネ定数の求め方は、受動型動吸振器の場合に Warburton が用いた方法¹⁸⁾を参考とした。

表1 解析モデルのパラメータ一覧

| 等価な受動型動吸振器の最適値 | | 直動型動吸振器の最適値 | |
|-----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| $\mu_{eq} = 0.15$ | $m = 1.0$ | $\mu = 0.01$ | $m = 1.0$ |
| $\eta_{opt} = 0.184$ | $\omega_{eq} = 6.74$ | $g_A = 0.14$ | $\omega_o = 6.32$ |
| $\xi_{opt} = 0.902$ | $k = 45.48$ | $\eta_{opt} = 0.197$ | $k = 40.0$ |
| $\omega_{opt} = 6.08$ | | $\xi_{opt} = 0.957$ | |
| $k_d = 5.54$ | | $k_A = 0.366$ | |
| $c_d = 0.315$ | | $c_A = 0.0238$ | |

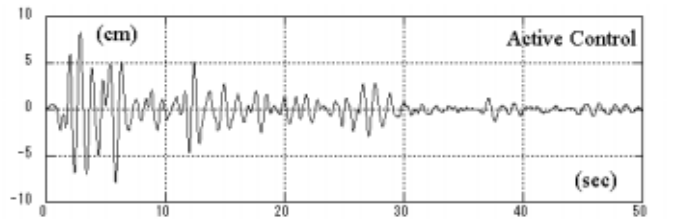


図4 直動型動吸振器を持つ主振動系の相対変位応答 $x - x_G$ (El Centro NS 341 cm/sec² 入力)

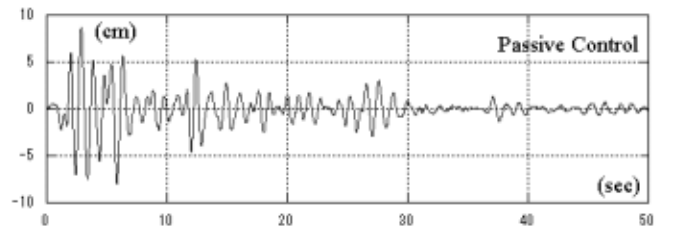


図5 等価な受動型動吸振器を持つ主振動系の相対変位応答 $x - x_G$

式(15)と(16)を計算すると、式(17)と(18)が得られる。

$$4\eta^2 = -3(1+\mu)\xi^2 + \frac{1}{(1+\mu)\xi^2} + \frac{2+\mu-g_A}{1+\mu} \quad (17)$$

$$4\eta^2 = (1+\mu)\xi^2 + \frac{1}{(1+\mu)\xi^2} - \frac{2+\mu-g_A}{1+\mu} \quad (18)$$

従って、両式を満足する減衰率と振動数比を最適値と定義すると、それぞれ、式(19)と式(20)で与えられる。

$$\eta_{opt} = \sqrt{\frac{(4+3\mu-g_A)(\mu+g_A)}{8(1+\mu)(2+\mu-g_A)}} \quad (19)$$

$$\xi_{opt} = \frac{1}{1+\mu} \sqrt{\frac{2+\mu-g_A}{2}} \quad (20)$$

結局、最適なフィードバックゲインは次式で与えられる。

$$k_A = k_{opt} = m\omega_{opt}^2 = m\omega_o^2 \xi_{opt}^2 \quad (21)$$

$$c_A = c_{opt} = 2m_d\omega_o\xi_{opt}\eta_{opt} \quad (22)$$

ここで示した絶対加速度制御則による直動型動吸振器と受動型動吸振器を比較すると、制御効果と制御則の物理的な意味を把握し易い。実際に、質量比 μ を持つ直動型動吸振器を加速度フィードバック量 g_A で最適制御した場合の特性方程式の解と、振動数 ω_{eq} の主振動系が質量比 μ_{eq} の受動型動吸振器を有する場合の特性方程式の解が等しいと定義すると、ほぼ次の関係が成立する。

$$\mu_{eq} = \mu + g_A \quad (23)$$

$$\omega_{eq} = \omega_o \sqrt{\frac{1+\mu_{eq}}{1+\mu}} \quad (24)$$

この関係は、質量比の小さい能動型動吸振器の振動制御効果を質量比の大きな受動型動吸振器と同等まで引き上げることが可能であることを示している。次に、数値解析により、質量比の大きい受動型動吸振器に最適パラメータを与えた場合の変位の時刻歴応答と、質量比の小さい直動型動吸振器の変位の時刻歴応答を比較し、式(23)、(24)の妥当性を検証する。表1には、質量比0.01でフィードバックゲイン0.14の加速度フィードバック制御を行った直動型動吸振器の最適パラメータと、これに等価な質量比0.15の受動型動吸振器の最適パラメータを示す。外乱として、最大加速度341cm/sec²のEl Centro (NS)の地震波を用い、時刻歴応答解析した結果を図4と図5に示す。両者はほぼ等しく、直動型動吸振器を等価な受動型動吸振器で評価できることが分る。本論文では、紙面の関係で上記の一例を示すに留めるが、他の数値解析結果からも式(23)、(24)の妥当性を確かめることができる。

最後に、制御則の安定性について述べる。フィードバック系が安定であるためには、加速度フィードバック量は次の関係を満足しなければならない。式(25)は、特性方程式の根の全てが複素平面上の左側に存在するための条件として求められる。

$$g_A < 1.0 \quad (25)$$

4 ハイブリッド型動吸振器の制御エネルギー吸収応答

前節では、直動型動吸振器で主振動系の変位応答を最小化する最適減衰率と最適振動数比を求めた。本節では、ハイブリッド型動吸振器で直動型動吸振器と同じ制御効果を得ることを考える。例えば、フィードバックゲインの c_A と k_A を、ハイブリッド型動吸振器(図2)の c_d と k_d でそれぞれ置き換えると、全く同じ制御効果が得られる。実際、ハイブリッド型動吸振器の運動方程式は図2を参照すると次式で与えられる。

$$\begin{cases} m_d \ddot{y} + c_d \dot{y} + k_d y = -m_d \ddot{x} + u(t) \\ (m + m_d) \ddot{x} + kx = mf(t) - m_d \ddot{y} \end{cases} \quad (26)$$

$$\quad (27)$$

一般的には、制御則を式(28)で与えたとき、ハイブリッド型動吸振器と直動型動吸振器の制御効果が一致するためには、式(29)、(30)の2条件を満足すればよいことが分る。

$$u(t) = -k_A y - c_A \dot{y} - mg_A \ddot{x} \quad (28)$$

$$\begin{cases} c_{opt} = c_d + c_A \\ k_{opt} = k_d + k_A \end{cases} \quad (29)$$

$$\quad (30)$$

以上の条件が満足されると、直動型動吸振器とハイブリッド型動吸振器の制御効果は、全く等しくなる。そこで、駆動装置に必要な制御エネルギーが最も小さくなるように、能動型のバネ定数と機械的なバネ定数の比率、あるいは、能動型の減衰係数と機械的な減衰係数の比率を求めることを考える。制御則の如何によらず運動方程式(26)、(27)は次式を満足する。

$$\begin{bmatrix} m_d & m_d \\ m_d & m + m_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_d & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ mf(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

両辺に速度ベクトルを掛けて合計すると、応答パワーの釣り合い式が得られる。

$$\begin{aligned} m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} + m_d(\dot{x} + \dot{y})(\ddot{x} + \ddot{y}) + k_d y\dot{y} \\ + c_d \dot{y}^2 - \dot{y}u(t) = m\dot{x}f(t) \end{aligned} \quad (32)$$

地震が発生してから終了するまでの時間 T で両辺を積分すると時刻 T におけるエネルギー積分の釣り合い式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m_d(\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{1}{2} k_d y^2 \\ + c_d \int_0^T \dot{y}^2 dt - \int_0^T \dot{y}u(t) dt = m \int_0^T \dot{x}f(t) dt \end{aligned} \quad (33)$$

系が安定であれば、時間の経過と共に振動は減衰する。従って、式(33)の釣り合いは次式に帰着する。

$$c_d \int_0^{+\infty} \dot{y}^2 dt - \int_0^{+\infty} \dot{y}u(t) dt = m \int_0^{+\infty} \dot{x}f(t) dt \quad (34)$$

式(34)の左辺の第1項は受動型減衰装置のエネルギー吸収量を表し、第2項は能動型減衰装置の制御エネルギー吸収量を表している。また、右辺は地震動による系への総入力エネルギーを表している。もしも、どのような地震が発生するか、事前に最初から最後まで既知であればエネルギー積分を求めることができる。従って、事前に受動型減衰装置の c_d を式(35)の値に調整しておくことができれば、制御エネルギー吸収応答を時間の経過と共に零に収束させることができる。

$$c_d = \frac{m \int_0^{+\infty} \dot{x}f(t)dt}{\int_0^{+\infty} \dot{y}^2 dt} \quad (35)$$

勿論、未来を予測することは不可能であるから、地震が発生する以前に最適な減衰係数 c_d を設定することはできない。これが決定論的なアプローチの限界である。

さて、外乱が定常不規則過程であるとすれば、確率論的にアンサンブル平均を取ることによって、式(35)に対応する式(36)を評価することが可能となる。しかし、式(36)を計算するためには、定常不規則外乱である地震動のスペクトルを仮定しなければならない。

$$c_d = \frac{mE[\dot{X}F]}{E[\dot{Y}^2]} \quad (36)$$

もしも、如何なるスペクトルを有する地震動に対しても式(36)の成立を期待するならば、外乱がホワイトノイズであっても式(36)は成立すべきである。これは、如何なるスペクトルを有する定常不規則外乱に対しても、制御パワー応答が零となるための必要条件である。式(36)の分母は、外乱をホワイトノイズと仮定すると次式で与えられる。

$$E[\dot{Y}^2] = \frac{\pi S_o}{1 - g_A} \left(\frac{\mu + g_A}{2\mu^2 \omega_{opt} \eta_{opt}} \right) \quad (37)$$

式(36)の分子を計算するためには、式(38)を評価する必要がある。

$$E[\dot{X}F] = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{h}_x(\tau) f(t - \tau) d\tau f(t) \right] \quad (38)$$

ここで、 $\dot{h}_x(t)$ は速度のインパルス応答関数である。式(38)は式(39)に等しい。また、外乱の自己相関関数は式(40)で定義できるので、式(38)は結局、式(41)に等しい。

$$E[\dot{X}F] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{h}_x(\tau) E[f(t - \tau) f(t)] d\tau \quad (39)$$

$$R_f(\tau) = E[f(t - \tau) f(t)] \quad (40)$$

$$E[\dot{X}F] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{h}_x(\tau) R_f(\tau) d\tau \quad (41)$$

外乱をパワースペクトル S_o のホワイトノイズと仮定しているので、自己相関関数はディラックのデルタ関数を用いて次式となる。

$$R_f(\tau) = 2\pi S_o \delta(\tau) \quad (42)$$

ここで、ディラックのデルタ関数で振動系を加振するとインパルス応答を評価できる。

$$M \begin{bmatrix} \ddot{h}_y(t) \\ \ddot{h}_x(t) \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \dot{h}_y(t) \\ \dot{h}_x(t) \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} h_y(t) \\ h_x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} \delta(t) \quad (43)$$

両辺の積分をとると次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} M \begin{bmatrix} \dot{h}_y \\ \dot{h}_x \end{bmatrix} dt + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} C \begin{bmatrix} h_y \\ h_x \end{bmatrix} dt \\ + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} K \begin{bmatrix} h_y \\ h_x \end{bmatrix} dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} \delta(t) dt \end{aligned} \quad (44)$$

一方、速度と変位のインパルス応答は式(45)を満足するので、式(44)は式(46)となる。

$$\begin{aligned} \dot{h}_x(-\varepsilon) = 0 & \quad h_x(-\varepsilon) = h_x(+\varepsilon) = 0 \\ \dot{h}_y(-\varepsilon) = 0 & \quad h_y(-\varepsilon) = h_y(+\varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$M \begin{bmatrix} \dot{h}_y(+\varepsilon) \\ \dot{h}_x(+\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} \quad (46)$$

結局、式(46)の両辺に質量マトリックスの逆行列を左から掛け合わせると式(47)を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_y(+\varepsilon) \\ \dot{h}_x(+\varepsilon) \end{bmatrix} = \frac{1}{mm_d(1 - g_A)} \begin{bmatrix} m + m_d & -m_d - mg_A \\ -m_d & m_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} \quad (47)$$

従って、

$$\dot{h}_x(+\varepsilon) = \frac{1}{1 - g_A} \quad (48)$$

式(48)を式(41)に代入すると次式を得る。

$$E[\dot{X}F] = \frac{\pi S_o}{1 - g_A} \quad (49)$$

式(37)と式(49)を式(36)に代入すると、制御パワー応答をアンサンブル平均の意味でゼロにできる減衰係数とフィードバックゲインの値が求まる。

$$c_d = \frac{\mu}{\mu + g_A} c_{opt} \quad (50)$$

$$c_A = \frac{g_A}{\mu + g_A} c_{opt} \quad (51)$$

この結果は、ホワイトノイズに対して制御パワー応答をアンサンブル平均の意味で零とする解析解である。従って、式(50)、(51)は、如何なるスペクトルを有する外乱に対しても、式(36)の成立を保証するものではなく、必要条件に過ぎない。しかしながら、式(50)、(51)は次のようにして、十分条件でもあることが証明できる。

まず、式(50)が成立すると仮定すれば、変位応答 $x(s)$ 、 $y(s)$ ならびに制御力 $u(s)$ の外力 $f(s)$ に対する伝達関数は、それぞれ次式で与えられる。

$$x(s) = \frac{s^2 + 2\omega_{opt}\eta_{opt}s + \omega_{opt}^2}{\Delta(s)} f(s) \quad (52)$$

$$y(s) = -\frac{(\mu + g_A)s^2}{\mu\Delta(s)} f(s) \quad (53)$$

$$u(s) = [-mg_A s^4 + \frac{\mu + g_A}{\mu} k_A s^2 - \frac{g_A}{\mu} k_{opt} s^2] \frac{f(s)}{\Delta(s)} \quad (54)$$

ただし、

$$\Delta(s) = (1 - g_A)s^4 + 2(1 + \mu)\omega_{opt}\eta_{opt}s^3 + (\omega_o^2 + (1 + \mu)\omega_{opt}^2)s^2 + 2\omega_{opt}\omega_o^2\eta_{opt}s + \omega_o^2\omega_{opt}^2$$

従って、制御パワー応答の期待値を計算すると式(55)となり、外乱のスペクトルと無関係に制御パワー応答は零となる。即ち、式(50)、(51)は定常不規則外乱下における制御パワー応答を、外乱のスペクトルと無関係に、零とするための必要十分条件であることが証明された。

$$E[U\dot{Y}] = \alpha E[\ddot{Y}\dot{Y}] + \beta E[\dot{Y}Y] = 0 \quad (55)$$

ここで

$$\alpha = \frac{mg_A\mu}{\mu + g_A} \quad (56)$$

$$\beta = -k_A + \frac{g_A}{\mu + g_A} k_{opt} \quad (57)$$

また、ハイブリッド制御における機械的なばね定数 k_d の選定は、定常不規則外乱下における制御パワー応答に影響を与えないことも、式(55)から理解できる。しかし、制御力応答は、機械的なばね定数の選定によって大きく異なることが式(54)から推定できる。

5 ハイブリッド型動吸振器の制御力応答

前節では、ハイブリッド型動吸振器に並列に配置した機械的な減衰装置を調節して、定常不規則外乱下における制御パワー応答を確率論的な意味で最小とする最適解を求めた。本節では、ハイブリッド型動吸振器の制御力応答の二乗平均期待値を最小とする受動型減衰装置の最適解を求める。式(26)より制御力応答は次式を満足する。

$$u(t) = m_d(\ddot{x} + \ddot{y}) + c_d\dot{y} + k_d y \quad (58)$$

このとき、外乱が定常不規則過程とすれば、制御力応答の二乗平均期待値は次式となる。

$$E[U^2] = k_d^2 E[Y^2] + 2k_d m_d E[Y(\ddot{Y} + \ddot{X})] + c_d^2 E[\dot{Y}^2] + 2c_d m_d E[\dot{Y}\ddot{X}] + m_d^2 E[(\ddot{Y} + \ddot{X})^2] \quad (59)$$

式(59)の右辺は、バネ定数 k_d と減衰係数 c_d を変数とする2次関数と考えることができる。従って、式(59)を最小とする機械的なバネ定数と減衰係数は、2次関数の最小値問題であるから容易に求めることができる。最適解は式(60)、(61)で与えられる。

$$k_d = -\frac{m_d E[Y(\ddot{Y} + \ddot{X})]}{E[Y^2]} \quad (60)$$

$$c_d = -\frac{m_d E[\dot{Y}\ddot{X}]}{E[\dot{Y}^2]} \quad (61)$$

一方、制御パワー応答の期待値を求めると次式を得る。

$$E[U\dot{Y}] = m_d E[\ddot{X}\dot{Y}] + c_d E[\dot{Y}^2] \quad (62)$$

従って、制御パワー応答をゼロにするためには、 c_d が次式を満足する必要がある。

$$c_d = -\frac{m_d E[\ddot{X}\dot{Y}]}{E[\dot{Y}^2]} \quad (63)$$

式(61)と式(63)は等しい。従って、外乱のスペクトルに依存することなく、制御力の2乗平均期待値を最小とする減衰係数と制御パワーを零とする減衰係数は、互いに等しいことが判る。従って、式(61)の最適解は式(50)に等しい。

一方、定常不規則外乱下で制御力応答の2乗平均期待値を最小とする機械的なばね定数は、外乱のスペクトルを仮定しなければ求めることができない。ここでは、ホワイトノイズを仮定して式(60)を計算することで最適値を算定する。前節の式(13)と同様の計算を行うことによって、上記の計算に必要なパワースペクトルを算定すると次式を得る。

$$E[Y^2] = \frac{\pi S_o}{\omega_o^2} \left(\frac{\mu + g_A}{2\mu^2 \omega_{opt} \eta_{opt}} \right) \quad (64)$$

$$E[Y\ddot{X}] = \pi S_o \left(\frac{1}{2\mu\omega_{opt}\eta_{opt}} \right) \left(\frac{1}{1 - g_A} - \xi_{opt}^2 \right) \quad (65)$$

式(64)～(65)を式(60)に代入すると、制御力応答の二乗平均期待値を最小とする機械的なばね定数が求まる。

$$k_d = k_{opt} \left(\frac{1}{\mu + g_A} \right) \left(\mu + \frac{g_A}{(1 - g_A)\xi_{opt}^2} \right) \quad (66)$$

機械的なばね定数の最適値は、実はほとんど k_{opt} に等しいことが式(66)から読み取れる。従って、 k_A は、殆ど零に等しい。

ここで、絶対加速度フィードバックによるハイブリッド型動吸振器の制御則を、現代制御理論からは導くことができない理由を述べる。伝統的なLQR制御と一般的に呼ばれている最適制御解は、伝達関数の極配置(Poleの位置)に注目したものである。例えば、Friedlandはその著書(文献19)の中で、「系の動特性は、極配置が決まれば、原理的には、完全に記述することが可能である。」と述べている。

ところで、本論文の中心的話題は、伝達関数の分子に着目して制御力応答や制御力エネルギーを論じた点にある。従って、伝達関数の分子を殆んど無視して理論構築されている現代制御理論では、ここで求めたような最適解を得ることは不可能なのである。

6 数値解析

前節までに、確率論的に見た最適なフィードバックゲインとハイブリッド制御の最適パラメータを求めた。本節では、予め制御ゲインや制御パラメータを与えた基本モデルを作る。次に、この基本モデルに対して地震動を入力し、時刻歴応答を数値解析する。最後に、式(67)によって、制御エネルギー吸収応答の収束判定を行う。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \dot{y}u(t)dt = 0 \quad (67)$$

既に述べたように、地震発生前に地震外乱の全ての情報を知っていれば式(35)によって c_d を計算した後にシステムを構築しておけば、能動型減衰装置のエネルギー吸収応答を零に収束させること、即ち、式(67)を満足させることが可能である。しかし、未来を予測できない以上これは無理な話である。そこで、非定常不規則外乱である地震動の代わりに、定常不規則外乱を仮定して、式(67)を確率論的に満足する期待が最も高い c_d の値を求めたのである。式(50)、(51)によって、 c_d や c_A などは事前に計算することが可能である。この場合、任意の地震外乱を作用させたときに、はたして式(67)は満足されるのであろうか。これが、この節の数値解析の目的である。

表2には、2つの解析モデルのパラメータを示す。最適な減衰率は式(50)より計算した。また、制御エネルギー吸収応答を消去するためには、受動型の減衰装置の最適減衰係数を式(19)から決定すればよい。まず、対象とする振動系をCase1の基本モデルとし単位質量当たりの総入力エネルギー応答、制御エネルギー吸収応答、受動型減衰装置のエネルギー吸収応答の3つをそれぞれ次式で定義する。

$$E_i(T) = \int_0^T \ddot{x}_G(t)dt \quad (\text{Total Input Energy}) \quad (68)$$

$$E_c(T) = -\frac{1}{m} \int_0^T \dot{y}u(t)dt \quad (\text{Control Energy}) \quad (69)$$

$$E_d(T) = \frac{c_d}{m} \int_0^T \dot{y}^2(t)dt \quad (\text{Damping Energy}) \quad (70)$$

次に、地震外乱として、El Centro(NS) 341cm/sec²を作用させた。式(68)、(69)、(70)、それぞれのエネルギー吸収応答の時刻歴を計算した結果が図6である。非定常不規則外乱の代表である地震動に対しても、事前に最適パラメータを設定した振動系において、制御エネルギー吸収応答が時間の経過と共に、零に収束することが判る。同様の計算を Taft(EW)最大加速度 176cm/s²について行った結果を図7に示す。いずれの場合も、制御エネルギー吸収応答は式(67)を満足する。また、表2に示すCase2に対して、同様の計算を行った結果を図8、図9に示す。

著者の行った解析の範囲では、全てのケースで式(67)の成立が確認された。実は、この結果を次のように証明することができる。まず、式(52)、(53)、(54)、(55)を参照すると、制御エネルギー応答は式(71)で表される。

$$E_c(T) = -\frac{1}{m} \int_0^T \dot{y}u(t)dt = -\frac{1}{m} \int_0^T (\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y})dt \quad (71)$$

表2 解析モデルのパラメータ一覧

| 主振動系の 諸定数 | 能動型動吸振器 (Case1) | 能動型動吸振器 (Case2) |
|---------------------------------|--------------------|--------------------|
| $m = 1.0$ | $g_A = 0.04$ | $g_A = 0.03$ |
| $\omega_o = 6.32(\text{rad/s})$ | $\mu = 0.02$ | $\mu = 0.03$ |
| $k = 40.0$ | $k_{opt} = 0.912$ | $k_{opt} = 1.13$ |
| | $c_{opt} = 0.0330$ | $c_{opt} = 0.0450$ |
| | $k_A = -0.057$ | $k_A = -0.03$ |
| | $c_A = 0.0220$ | $c_A = 0.0225$ |
| | $k_d = 0.969$ | $k_d = 1.16$ |
| | $c_d = 0.0110$ | $c_d = 0.0225$ |

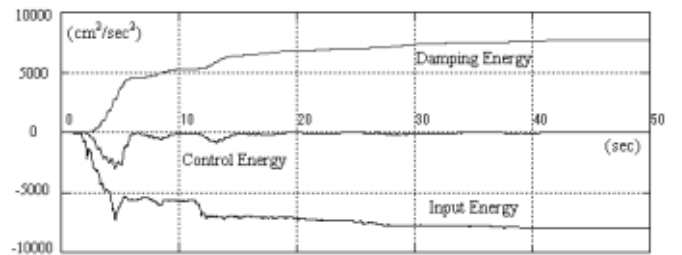


図6 Case1 時刻歴応答 El Centro (NS) 341cm/sec²

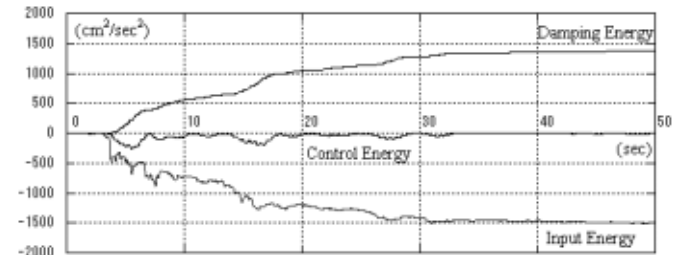


図7 Case1 時刻歴応答 Taft (EW) 176cm/sec²

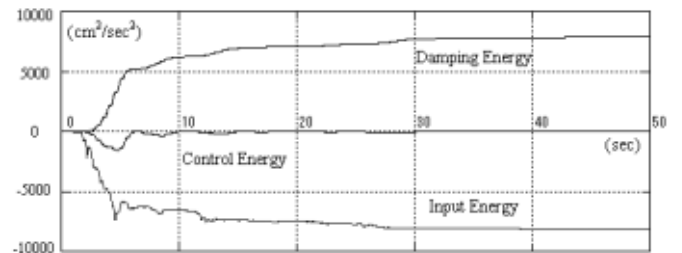


図8 Case2 時刻歴応答 El Centro (NS) 341cm/sec²

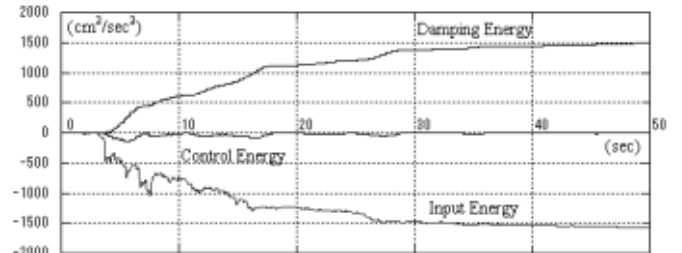


図9 Case2 時刻歴応答 Taft (EW) 176cm/sec²

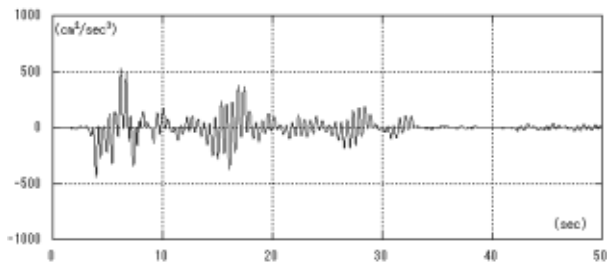


図 10 Case1 制御パワー応答 Taft EW 176cm/sec²

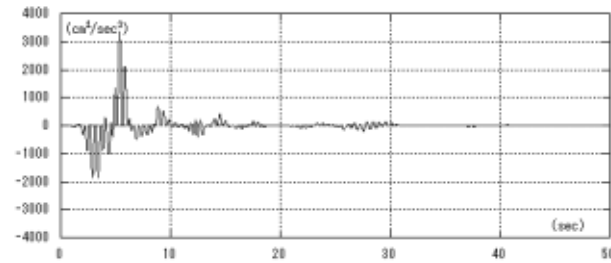


図 11 Case2 制御パワー応答 El Centro NS 341cm/sec²

従って、制御エネルギー吸収応答は、最適な機械的減衰係数を設定した場合、式(72)に帰着する。振動系が安定である限り、いかなるスペクトルを有する非定常不規則外乱下における制御エネルギー吸収応答も、時間の経過と共に必ず零に収束することが示された。また、式(72)の符号から制御エネルギー応答が常に負となることが判る。実際、図 6～9 において制御エネルギーの時刻歴応答は常に負値となっている。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_c(T) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \alpha \dot{y}(T)^2 + \frac{1}{2} \beta y(T)^2 \right] = 0 \quad (72)$$

非定常の不規則外乱に対する応答と定常不規則外乱に対する応答の最も大きな違いは、制御パワー応答に現れる。定常不規則外乱の場合は、制御パワー応答はアンサンブル平均の意味でゼロとなった。しかし、地震動の場合には式(73)に示す、単位質量当りの制御パワー応答の最大値は極めて大きくなる。

$$P(t) = - \frac{1}{m} \dot{y}(t)u(t) \quad (\text{制御パワー応答}) \quad (73)$$

図 10 と図 11 には、それぞれ Case1 と Case2 に対応した制御パワー応答を示す。制御に必要なエネルギーはゼロであっても、制御装置にはパワーが必要であり、しかもその値はきわめて大きい。制御装置に必要な制御力は、梃子の原理でいくらでも削減できるが、制御パワーは制御効果を落とさない限り削減することはできないのである。従って、能動型制御装置の性能限界は制御パワーによって大きく左右される。

7 結 語

非定常不規則外乱である地震外乱に対し、建築構造物内部に設置された能動型の動吸振器を用いて振動制御を行う場合、制御エネルギーを全く必要としないアルゴリズムが存在する。また、建築構造物の内部に設置された能動型ブレースを用いて、振動制御を行うアルゴリズムにも制御エネルギーを全く必要としない手法がある。(文献 17)。本論文と文献 17 で示された能動型の制震構造は最も一般的

な構成であり、その両者について制御エネルギー吸収応答を完全に消去することができるハイブリッド制御アルゴリズムの存在することが示された。しかも、この結果は、如何なるスペクトルを有する地震動に対しても常に成立することが証明された。

従来、我々は、耐力、変形能力、吸収エネルギー能力の 3 点を以って、地震による部材損傷を定義してきた。特に、エネルギー積分の値を以って地震時の部材損傷を評価する方法は構造形式に依存しない手法として有効であると考えられてきた。しかし、従来のエネルギー積分による部材損傷評価方法で能動型構造部材の損傷を評価するならば、部材損傷を完全に消去できる制御方法が、どうやら一般的に存在するらしいことが予想されるのである。

耐震構造部材の損傷評価についてエネルギー積分による定義の一般性が吟味され、また、制震構造部材の性能評価を行う際にエネルギー吸収性能が主たる指標として議論されつつある現在、地震動のエネルギー吸収量のみで部材損傷を定義することには、一定の歯止めと十分な議論が必要であることを、本論文の結果は示しているのである。

参考文献

- 1) Den Hartog, *Mechanical Vibration*, 3rd Edition, McGraw - Hill, New York, pp. 112-133, 1947
- 2) 小堀鏗二、他、“ダイナミックインテリジェントビルの試みー可変剛性を有する D.I.B.、”日本建築学会大会梗概集 B、構造 I、pp.839 - 841、1986 年 8 月
- 3) Akiyama,H.,"Earthquake Resistant Design, Base Isolation and Control of Seismic Responses," International Workshop on Recent Developments in Base-Isolation Techniques for buildings, pp.49-59, April, 1992
- 4) Ormondroyd,J., Den Hartog,J.P., "The Theory of the Dynamic Vibration Absorber," Trans., ASME, Applied Mechanics, Vol.50, pp.9 - 22, 1928
- 5) Rockwell,T.H., "Investigation of Structure-Borne Active Vibration Dampers," Journal of the Acoustical Society of America, Vol.38, pp.623-628, 1956
- 6) Abu-Akeel,A.K., "The Electrodynamic Vibration Absorber as a Passive or Active Device," Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, pp.741-753, Nov., 1967
- 7) Morison,J.,Karnopp,D., "Comparison of Optimized Active and Passive Vibration Absorber," 14th Annual Joint Automatic Control Conference, Ohio State Univ.,Columbus,Ohio,pp.932-938, June, 1973
- 8) McNamara,R.J., "Tuned Mass Dampers for Buildings," ASCE, Journal of Structural Division,Vol.103,pp.1785 - 1798,Sept.,1977
- 9) Lund,R.A., "Active Damping of Large Structures in Winds," ASCE, Convention and Exposition, Boston, April,1979
- 10) Chang,C.H.,Soong,T.T., "Structural Control Using Active Tuned Mass Dampers," ASCE,EM6,Vol.106,pp.1091 - 1098,Dec.,1980
- 11) Kobori,T., et al., "Seismic - response-controlled Structure with Active Mass Driver System (Part 2) Verification," Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol.20, No.2, pp.133-149 Feb.,1991
- 12) Samali,B., Yang,J.N., Yeh,C.T., "Control of Lateral - Torsional Motion of Wind-Excited Buildings," ASCE, Journal of the Engineering Mechanics, Vol.111, No.6,pp.777-796, June, 1985
- 13) 柴慶治、田村和夫、佐武直紀、横田治彦、来田義弘、“ハイブリッドマスダンパー (HMD) を用いた建築構造物の応答制御、”アクティブ制震 (振) シンポジウム論文集、pp.263 - 270、1992 年 3 月
- 14) 谷田宏次、小池祐二、牟田口勝生、能勢卓、角谷常宏、“2 軸ハイブリッド式制振装置の開発と適用例、”アクティブ制震 (振) シンポジウム論文集、pp.271 - 278、1992 年 3 月
- 15) 西村功、小堀鏗二、坂本光雄、小堀紀英、佐々木勝康、大類哲、“絶対加速度フィードバックによるアクティブ動吸振器、”アクティブ制震 (振) シンポジウム論文集、pp.187 - 193、1992 年 3 月
- 16) 西村功、他“アクティブ二重動吸振器の開発・実用化に関する研究 (その 1) ~ (その 7) ”、日本建築学会大会梗概集、1993 年 10 月
- 17) 西村功 “非定常不規則外乱下における能動型ブレースのエネルギー吸収応答、”日本建築学会構造系論文集、第 567 号、pp.55 - 62、2003 年 5 月
- 18) Warburton,G.B., "Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.10, pp.381 - 401, 1982
- 19) Friedland,B., *Control System Design, (chapter 6 ,Chapter 9)* McGraw Hill, New York, N.Y., 1986