

幾何学的非線形を考慮した曲げ-せん断部材の座屈後挙動
— 免震構造用積層ゴム支承の座屈安定性問題への適用 —THE EFFECT OF GEOMETRICAL NONLINEARITY ON
THE BUCKLING LOAD OF SHEAR-BENDING COLUMNS

西村 功

Isao Nishimura

This paper evaluates the effect of geometrical nonlinearity on the buckling load of shear-bending columns. The motivation of this study comes from the recognition that the linear buckling model proposed by Haringx in 1948 seems well fit to the experimental observation in the author's laboratory where high-rise rubber bearings were tested. It, however, contradicts to the numerous test results in the past research both in domestic and overseas as well. As a result of the study in this paper, the geometrical nonlinearity is shown to have a malevolent effect on the post-buckling behavior latent in the low-rise laminated rubber bearings, which are commonly used in a practical design of base-isolated buildings.

Keywords: buckling load, base isolation, Haringx model, geometrical nonlinearity, elliptic function

座屈荷重、免震構造、ハリクスモデル、幾何学的非線形、楕円関数

1 序 論

本論文は、免震構造の主要部材である積層ゴム支承の座屈モデルについて考察したものである。

著者は、免震構造に用いられる積層ゴム支承の座屈安定性を向上させる目的で、中空孔を有する積層ゴム支承の鉛直剛性、曲げ剛性、などについて実験と解析の両面から検討を加えてきた⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾。その結果、積層鋼板に比較的厚みのある材料を用いるとHaringxモデルで予想される座屈荷重がほぼ正確に実験で再現されることや、大きな変形を生じた後も、荷重-変形関係が高い線形性を示すことなどの実験結果を得た⁽⁴⁾。

一方、円形断面積層ゴム支承の座屈荷重はHaringxモデル⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾で予測されると考えられているが、実際に実験を行うと実験結果は理論値を下回る場合が多く、Haringxモデルの妥当性には疑問が残る。そのため、幾何学的な非線形性が座屈荷重の低下を引き起こす主たる原因であると見なされ、P- δ 効果を加味して理論値を修正することが行われてきた⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

では、両者の違いはどのようにして生じたのであろうか。勿論、こうした違いが中空断面積層ゴム支承に特有の現象であるのか、それとも積層ゴム支承の力学モデルを一般的に再考する必要があるのかは、一概には断定できない。しかしながら、免震構造の主要部材である積層ゴム支承について、座屈安定性という基本的部材特性を考察するモデルに疑問が生じたことは事実である。

以上の既往研究の背景を踏まえ、本論文は Haringx の座屈モデルを見直し、変形の増大を考慮した幾何学的非線形座屈モデルを導き、座屈安定性に対して重要な要因を解析的に導いた。その上で、既往研究の結果と若干の比較検討を行った。

2 既往の研究

せん断変形と曲げ変形を同時に考慮した座屈モデルは、鋼構造の組み立て圧縮柱の座屈問題として古くから知られている。良く知られている組み立て圧縮柱の座屈モデルは中立軸に対して平面が垂直を維持しながら変形することを仮定している。これを通常 Engesser モデルと呼ぶ。この仮定は、即ち次式の成立を認めたものである。ここで、 s は部材の中立軸に沿った弧長媒介変数とする。

$$\frac{dM}{ds} = Q(s) \quad (1)$$

$M(s)$: 曲げモーメント

$Q(s)$: せん断力

通常、幾何学的非線形性や材料非線形性を考慮したモデルであっても、式(1)の成立を仮定するのは一般的である。これに対し、Haringx は圧縮コイルバネの座屈安定性が高い理由を理論的に説明するため、材料の線形性と式(2)を仮定した上で、式(1)が成立しないモデルを採用した⁽⁵⁾。勿論、Engesserモデルは、式(2)の成立も仮定している。通常、式(1)と式(2)をセットにして平面保持の仮定と呼んでいる。Haringxは、式(2)のみが成立するような平面保持の仮定を設定して、曲げ-せん断座屈モデルを作ったのである。

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = -\frac{M(s)}{K_B} \quad (2)$$

$\theta(s)$: 曲げモーメントによるたわみ角

K_B : 曲げ剛性

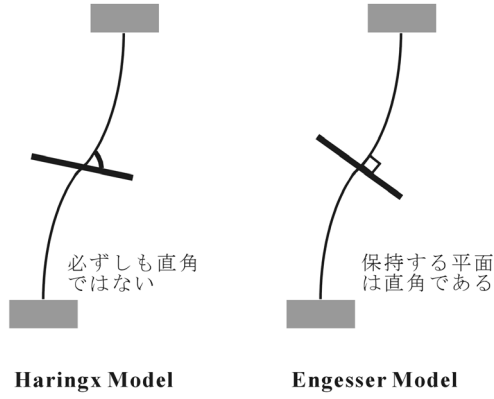


図1 2種類の異なる平面保持の仮定

図1にはEngesserモデルとHaringxモデルの違いを模式的に示した。積層ゴム支承の座屈実験では、Haringxモデルが実験結果と一致するとされている⁽¹⁰⁾。事実、著者が行った中空積層ゴム支承の座屈実験でも、積層鋼板の曲げ剛性が高い試験体では、Haringxの意味で平面保持を確保でき、座屈荷重が実験値と良く一致することを確認している。(本文、第4節、写真1参照)

しかし、円形断面積層ゴム支承の場合には、比較的小さい水平変形でも座屈荷重の低下することが知られており、P- δ 効果による座屈荷重の補正などが行われている^{(8), (9)}。一方、著者の行った中空積層ゴム支承の座屈実験では、断面の直径とほぼ等しい水平変形を加えても、座屈荷重の低下は見られなかった⁽⁴⁾。この実験結果は、既往の実験研究の結果と相反するもので、P- δ 効果で修正した既往モデルの妥当性に疑問が生じた。そこで、Haringxモデルについて、今一度、吟味することから始めることとする。

Haringxは、式(1)を仮定せずに、変形後の釣り合い状態を想定してモデルを構築した(Appendix参照)。つまり、P- δ 効果は当初よりHaringxモデルに折込済みであることが分かる。従って、既にP- δ 効果を考慮したHaringxモデルに対して、再度P- δ 効果を用いて修正を施そうとする試みは、論理的な矛盾を内包していることになる。さらに、今までに提案されたP- δ 効果による修正モデルの多くが、両端の付加曲げモーメントを積層ゴム支承高さで除してせん断力を求めているが、この種の計算は、式(1)を暗に仮定したものである。一つのモデルの中に、2つの両立しない仮定が同居しているようなもので、このような説明は受け入れ難い。しかしながら、水平変形の増大による座屈荷重の低下は多くの実験によって観測されており、Haringxモデルでは、実験結果を合理的に説明しきれないことも事実なのである。その理由は、Haringxモデルが微小変形の弾性理論である点にある。線形理論では、変形の増大に対する座屈荷重の低下を説明できないのは、致し方ないところである。しかし、著者が行った実験では、かなり大きな水平変形を生じた場合にも、線形のHaringxモデルが実験誤差の範囲で成立している。それでは、どのような条件を満足すると線形近似が成立するのであろうか。この条件を解明できれば、既往の実験研究の結果と、著者が行った実験結果の違いを合理的に説明できるはずである。

以上の観点より、本論文では、材料の線形性と式(2)を仮定した上で、幾何学的非線形モデルを提案し、水平変位の増大が座屈安定性に与える影響を考察した。以上が、本論文の要旨である。

3 幾何学的非線形を考慮した曲げせん断座屈モデル

幾何学的非線形を考慮した曲げせん断座屈モデルを図2に示す。部材中央部からの部材長 s を媒介変数として、反力と変形の釣り合い式を点 $P(x(s), z(s))$ について求めると式(3)を得る。

$$M(s) = N_o x(s) + Q_o z(s) \quad (3)$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin(\theta + \gamma) \quad (4)$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos(\theta + \gamma) \quad (5)$$

ここで、

- s : 点Pを示す弧長媒介変数
- $\theta(s)$: 曲げモーメントによるたわみ角
- $\gamma(s)$: せん断力によるたわみ角
- $x(s)$: 点Pの x 座標
- $z(s)$: 点Pの z 座標
- $N(s)$: 点Pの軸力
- $Q(s)$: 点Pのせん断力
- $M(s)$: 点Pの曲げモーメント
- Q_o : 部材端せん断力
- N_o : 部材端軸力
- M_o : 部材端曲げモーメント
- δ_H : 荷重が作用した後の水平変位
- h : 荷重が作用した後の部材高さ
- l : 荷重が作用した後の部材長さ

ここで、式(3)の両辺を微分すると、次式を得る。

$$\frac{dM}{ds} = N_o \sin(\theta + \gamma) + Q_o \cos(\theta + \gamma) \quad (6)$$

さらに変形すると次式を得る。

$$\frac{dM}{ds} = \sqrt{N_o^2 + Q_o^2} \sin(\theta + \gamma + \beta_o) \quad (7)$$

$$\tan \beta_o = \frac{Q_o}{N_o} \quad (8)$$

せん断力と軸力は次式にて与えられる。

$$N(s) = N_o \cos \theta - Q_o \sin \theta = F_o \cos(\theta + \beta_o) \quad (9)$$

$$Q(s) = N_o \sin \theta + Q_o \cos \theta = F_o \sin(\theta + \beta_o) \quad (10)$$

式(9)と(10)は座標回転を表しているだけなので次式が成立する。

$$N^2(s) + Q^2(s) = N_o^2 + Q_o^2 = F_o^2 \quad (11)$$

式(7)に加法定理を用い、式(9)、(10)を考慮すると次式を得る。

$$\frac{dM}{ds} = N(s) \sin \gamma + Q(s) \cos \gamma \quad (12)$$

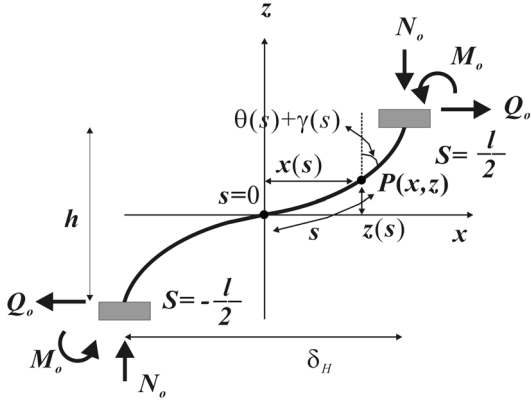


図2 幾何学的非線形を考慮した曲げせん断モデル

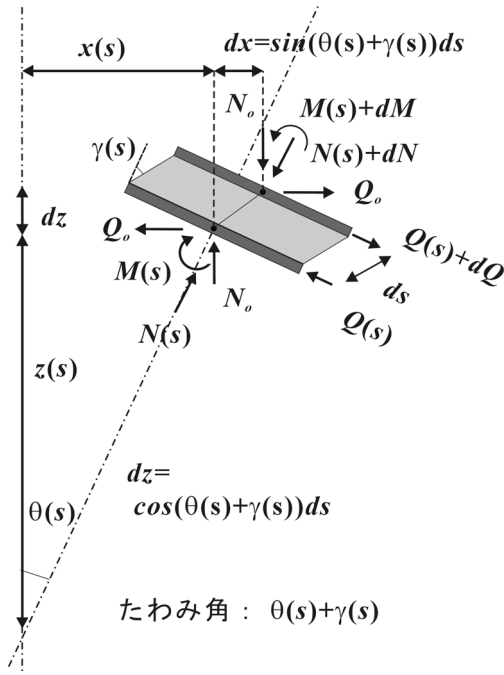


図3 局所的な釣り合い状態

式(11)を考慮すれば、式(12)は次式となる。

$$\frac{dM}{ds} = \sqrt{N(s)^2 + Q(s)^2} \sin(\gamma + \beta) = F_o \sin(\gamma + \beta) \quad (13)$$

$$\tan \beta(s) = \frac{Q(s)}{N(s)} \quad (14)$$

式(7)と式(13)から、次式を得る。

$$\beta(s) = \theta(s) + \beta_o \quad (15)$$

従って、軸力とせん断力は次式によって表される。

$$N(s) = F_o \cos \beta \quad (16)$$

$$Q(s) = F_o \sin \beta \quad (17)$$

式(15)を考慮して、曲げ理論式(2)を仮定する。

$$\frac{d\beta(s)}{ds} = \frac{d\theta(s)}{ds} = -\frac{M(s)}{K_B} \quad (18)$$

さらに、せん断ひずみについては式(17)を参照し、かつ材料の線形性を仮定すると次式を得る。

$$\gamma(s) = \frac{Q(s)}{K_S} = \frac{F_o}{K_S} \sin \beta \quad (19)$$

式(18)の両辺を微分して、式(13)を考慮すると次式を得る。

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{F_o}{K_B} \sin(\beta + \gamma) = 0 \quad (20)$$

式(19)を式(20)に代入すると、最終的に式(21)を得る。

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{F_o}{K_B} \sin\left(\beta + \frac{F_o}{K_S} \sin \beta\right) = 0 \quad (21)$$

式(21)は幾何学的な非線形性を全て考慮した大変形に対応できる厳密な非線形方程式である。式(15)を見ると、曲げ変形 θ が小さく、かつ軸力が比較的大きい場合、 β は部材全域において小さいので、式(21)は式(22)によって高い精度で近似できる。

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{F_o}{K_B} \sin\left(\frac{K_S + F_o}{K_S} \beta\right) = 0 \quad (22)$$

さらに、式(23)の変数置換を行うと式(22)は式(24)に変形できる。

$$\varphi(s) = \frac{K_S + F_o}{K_S} \beta(s) = \frac{K_B}{F_o \lambda_o^2} \beta(s) \quad (23)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{1}{\lambda_o^2} \sin \varphi = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{\lambda_o^2} = \frac{F_o^2 + K_S F_o}{K_S K_B} \quad (25)$$

また、式(13)は式(26)に等しい。

$$\frac{dM}{ds} = F_o \sin \varphi \quad (26)$$

式(24)は大振幅を考慮した振り子の非線形振動方程式と等しく、解は楕円関数 $sn(s, k)$ によって与えられる。従って、変数 φ の解は式(27)で与えられる。ここで c は積分定数である。

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn}\left(\frac{s}{\lambda_o} + c\right) \quad (27)$$

式(27)の母数 k は、 φ の最大値に対して次の関係を満足する。

$$k = \sin \frac{\varphi_{\max}}{2} \quad (28)$$

このとき、次式が成立する。

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2k}{\lambda_o} \operatorname{cn} \left(\frac{s}{\lambda_o} + c \right) \quad (29)$$

式(18)、(23)を考慮すると次式を得る。

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{F_o \lambda_o^2}{K_B} \frac{d\varphi(s)}{ds} = -\frac{M(s)}{K_B} \quad (30)$$

式(29)と(30)から、曲げモーメントは次式を満足する。

$$M(s) = -2k\lambda_o F_o \operatorname{cn} \left(\frac{s}{\lambda_o} + c \right) \quad (31)$$

ここで、境界条件を考慮すると中央部分 ($s=0$) で曲げモーメントはゼロとなる。従って、積分定数 c は第1種完全楕円積分 $K(k)$ に等しい。最終的に、曲げモーメント分布の解は次式となる。

$$M(s) = -2k\lambda_o F_o \operatorname{cn} \left(\frac{s}{\lambda_o} + K(k) \right) \quad (32)$$

部材端の境界条件は式(33)となる。ここでは、式(15)、(23)を考慮し、部材長 l が満足すべき φ の関数として表現した。

$$\theta \left(\frac{l}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \beta \left(\frac{l}{2} \right) = \beta_o \Leftrightarrow \varphi \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{Q_o}{K_S} + \beta_o \quad (33)$$

式(27)を考慮すると、境界条件(33)は次式で与えられる。

$$\sin \left(\frac{Q_o + \beta_o K_S}{2K_S} \right) = k \operatorname{sn} \left(\frac{l(k)}{2\lambda_o} + K(k) \right) \quad (34)$$

部材端部で反力が与えられ、変形の大きさは、パラメータ k を選定すると決まる。このとき、変形後の部材長 $l(k)$ は、式(34)を解くと求めることができる。次に、パラメータ k が与えられたときの水平変形 $\delta_H(k)$ と部材高さ $h(k)$ を求めることにする。まず、変形関数 $x(s)$ と $z(s)$ は次式で与えられることに注意する。

$$x(s) = \int_0^s \sin(\theta(u) + \gamma(u)) du = \int_0^s \sin(\varphi(u) - \beta_o) du \quad (35)$$

$$z(s) = \int_0^s \cos(\theta(u) + \gamma(u)) du = \int_0^s \cos(\varphi(u) - \beta_o) du \quad (36)$$

従って、下式を得る。

$$x(s) = \cos \beta_o \int_0^s \sin \varphi du - \sin \beta_o \int_0^s \cos \varphi du \quad (37)$$

$$z(s) = \cos \beta_o \int_0^s \cos \varphi du + \sin \beta_o \int_0^s \sin \varphi du \quad (38)$$

変形後の部材形状を決定するには、次の積分を評価する必要がある。

$$I_1 = \int_0^{l/2} \sin \varphi du \quad (39)$$

$$I_2 = \int_0^{l/2} \cos \varphi du \quad (40)$$

ところで、式(27)からは次の関係式を得る。

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn} \left(\frac{u}{\lambda_o} + K(k) \right) \quad (41)$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \operatorname{dn} \left(\frac{u}{\lambda_o} + K(k) \right) \quad (42)$$

式(39)は、式(41)、(42)を用いると式(43)で与えられる。

$$I_1 = \int_0^{l/2} 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} du = -2k\lambda_o \operatorname{cn} \left(\frac{l}{2\lambda_o} + K(k) \right) \quad (43)$$

一方、式(40)は次式に変形できる。

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{l/2} \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right) du \\ &= 2\lambda_o \int_{K(k)}^{K(k) + l(k)/2\lambda_o} \operatorname{dn}^2 u du - \frac{l(k)}{2} \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、ヤコビのゼータ関数を $zn(s, k)$ とすれば、楕円関数と次の関係がある。ここで、 $E(k)$ は第2種の完全楕円積分である。

$$zn(s, k) = \int_0^s \operatorname{dn}^2 u du - \frac{E(k)}{K(k)} s \quad (45)$$

式(45)を式(44)に代入すると、次式を得る。

$$I_2 = 2\lambda_o \left[zn \left(K(k) + \frac{l(k)}{2\lambda_o} \right) - zn(K) + \frac{E(k)}{K(k)} \frac{l(k)}{2\lambda_o} \right] - \frac{l(k)}{2} \quad (46)$$

$zn(s, k)$ 関数の加法定理から、式(47)を得る。

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{2\lambda_o} &= zn \left(\frac{l(k)}{2\lambda_o} \right) - k^2 \operatorname{sn} \left(\frac{l(k)}{2\lambda_o} \right) \operatorname{sn} \left(K(k) + \frac{l(k)}{2\lambda_o} \right) \\ &\quad + \left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{l(k)}{2\lambda_o} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

従って、水平変形と変形後の部材高さを求めると、次式を得る。

$$\frac{\delta_H(k)}{2} = I_1 \cos \beta_o - I_2 \sin \beta_o \quad (48)$$

$$\frac{h(k)}{2} = I_2 \cos \beta_o + I_1 \sin \beta_o \quad (49)$$

まず、部材断面性能 K_B 、 K_S を与える。次に部材端部に荷重を作用させる。荷重に対して λ_o が、式(25)により定まる。変形の大きさは楕円関数の母数 k を指定することで決まる。このとき、母数 k に対応した変形後の部材長 $l(k)$ は、式(34)から求まる。高さ h 、ならびに水平変形量 δ_H は求めた $l(k)$ と与えた k に対して、式(48)と(49)から与えられる。以上で全ての変数の関係が明らかとなる。このとき、母数 k に対する座屈荷重の変化の様子を調べれば、水平変形が座屈荷重に与える影響についても考察することができる。次節以降は、これらの点について考察する。

4 座屈荷重近傍における変形の増大と安定性

(4.1) 部材形状関数

前節では、任意の荷重を与えた場合の曲げせん断部材の変形を求めた。本節では部材端軸力 N_o が座屈荷重 N_{cr} に近い場合を取り上げ、水平変位の増大によって座屈荷重がどのように変化するかを考察する。まず、座屈荷重は部材端部のせん断力 Q_o が失われるときの軸力と定義する。即ち、次式で定義する。

$$N_{cr} = N_o \quad \text{where} \quad Q_o = 0 \quad (50)$$

まず、座屈荷重を与えたときの基準部材長 λ を式(25)に従い、式(51)で定義する。勿論、座屈荷重もパラメータ k の影響を受ける。

$$\frac{1}{\lambda^2(k)} = \frac{N_{cr}^2(k) + K_S N_{cr}(k)}{K_S K_B} \quad (51)$$

変形後の部材長 $l(k)$ は式(34)から求めることができる。式(8)から $\beta_o = 0$ となるので、次式が成立する。当然、部材長 l は母数 k の関数となる。

$$l(k) = 2K(k)\lambda(k) \quad (52)$$

式(48)からは、式(43)を参照して水平変形が求まる。

$$\delta_H(k) = 2I_1(k) = 4k\lambda(k) \quad (53)$$

さらに、 $zn(K(k)) = 0$ を考慮すると、式(49)は式(54)に等しい。

$$h(k) = 2(2E(k) - K(k))\lambda(k) \quad (54)$$

軸剛性を無限大と仮定すると積層ゴム一層ごとの厚みは変化しない。従って、部材の元の長さ l_o は図3を参照して次式で与えられる。

$$l_o = 2 \int_0^{1/2} \cos \gamma \, ds = 2 \int_0^{1/2} \cos(\varphi - \beta) \, ds \quad (55)$$

β が微小であることを考慮すると次式で近似できる。

$$l_o = 2 \int_0^{1/2} \cos \varphi \, ds + 2 \int_0^{1/2} \beta \sin \varphi \, ds \quad (56)$$

第2項を変形すると式(26)を参照して、次式を得る。

$$\int_0^{1/2} \beta \sin \varphi \, ds = \int_0^{1/2} \frac{\beta}{F_o} \left(\frac{dM}{ds} \right) ds \quad (57)$$

座屈状態であることを考慮し、部分積分をすると式(58)を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{\beta}{N_{cr}} \left(\frac{dM}{ds} \right) ds &= \left| \frac{\beta(s)M(s)}{N_{cr}} \right|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{M(s)}{N_{cr}} \left(\frac{d\beta}{ds} \right) ds \\ &= \frac{1}{N_{cr} K_B} \int_0^{1/2} M^2(s) ds \\ &= \frac{4k^2 \lambda^2 N_{cr}}{K_B} \int_0^{1/2} cn^2 \left(\frac{s}{\lambda(k)} + K(k) \right) ds \end{aligned} \quad (58)$$

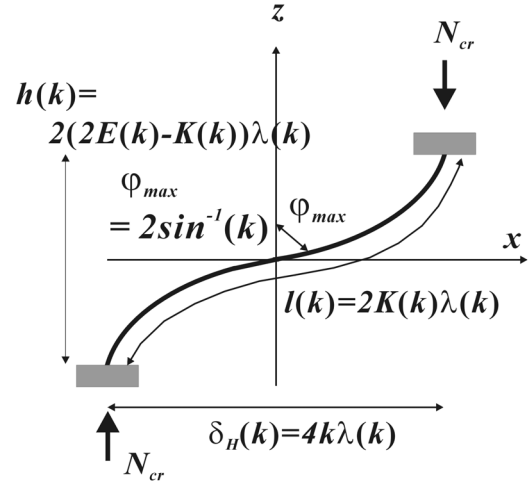


図4 座屈荷重近傍における部材変形を表す関数グループ

ここで、式(59)に注意すれば、式(57)は式(60)に等しい。

$$\int_0^{1/2} cn^2 \left(\frac{s}{\lambda(k)} + K(k) \right) ds = \frac{k^2 - 1}{k^2} \left(\frac{l(k)}{2} \right) + \frac{\lambda(k)}{k^2} E(k) \quad (59)$$

$$\int_0^{1/2} \beta \sin \varphi \, ds = \frac{4\lambda^2 N_{cr}}{K_B} \left(\lambda(k) E(k) + \frac{l(k)}{2} (k^2 - 1) \right) \quad (60)$$

従って、式(56)は式(61)に等しい。

$$\begin{aligned} l_o &= 2 \left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} \right) l(k) \\ &\quad + \frac{4\lambda^2 N_{cr}}{K_B} \left(2\lambda E(k) + k^2 l(k) - l(k) \right) \end{aligned} \quad (61)$$

式(52)を考慮すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} l_o &= 2(2E(k) - K(k))\lambda(k) \\ &\quad + \frac{8\lambda^3(k) N_{cr}(k)}{K_B} \left(E(k) + (k^2 - 1)K(k) \right) \end{aligned} \quad (62)$$

以上で、大変形後の部材形状を表現できる関数グループが求まった。変形後の部材長が式(52)によって、水平変位が式(53)によって、それぞれ求められる。さらに、ゴム支承の高さは式(54)で評価できる。これらの関係を図4に示す。

曲げ剛性のみを考慮した大変形モデルはよく知られており、通常部材長 l を定数と見なしている。ところが、積層ゴム支承では荷重増大後に部材長が大きく伸びるため、従来の大変形モデルでは非線形解析が不可能であった。この小論で示したモデルは、大変形後に部材長が伸びる場合にも、幾何学的な非線形性を考慮できる。

式(51)と(62)は、水平変位が増大した後に座屈荷重 N_{cr} と基準部材長 $\lambda(k)$ が満足すべき関係を示している。結局、この5つの関係式にパラメータ k を代入すると、具体的な変形を決定することができる。ただし、座屈荷重 $N_{cr}(k)$ は、係数が完全楕円積分を含む k の関数となる4次方程式の解、として与えられるので複雑である。

(4.2) 微小変形の場合： $k=0$

最初に、水平変位が極めて小さい場合の座屈荷重について考察する。このとき、座屈荷重は Haringx の微小変形理論と一致しなければならないはずである。ここでは、母数 $k=0$ の場合が対応する。式(52)と(54)を参照すると次の関係が得られる。部材長も支承高さも、荷重を載荷する前の部材長さ l_0 に等しい。

$$l(0) = h(0) = l_0 \quad (63)$$

このときの座屈荷重は特別なので、次式で定義する。この結果は、Haringx モデルの微小変形理論による座屈荷重と一致することが確かめられた。(Appendix 参照)

$$\frac{N_H^2 + K_S N_H}{K_S K_B} = \left(\frac{1}{\lambda_H} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{l_0} \right)^2 \quad (64)$$

$$N_{cr}(0) = N_H \quad (65)$$

(4.3) 若干変形が進んだ状態： $0 < k < 0.3$

水平変位が増大すると、座屈荷重は低下するのであろうか、それとも増大するのであろうか。既往研究の結果は、前者の結果を支持している。しかし、著者の実験結果では座屈荷重の変動は少なかった。この実験結果の違いを考察する。

そのためには、パラメータ k と座屈荷重 $N_{cr}(k)$ の関係を求めなければならない。満足すべき方程式は、式(51)と(62)である。基準部材長 λ を消去すると、座屈荷重 N_{cr} についての4次方程式が得られる。4次方程式の各係数は k についての関数であるから、 N_{cr} の解は k についての関数となる。

しかし、この問題を直接解くのは困難である。そこで、 k の動く範囲を比較的微小な範囲に限定し、楕円積分を級数展開によって近似する。第1種完全楕円積分と第2種完全楕円積分で、4次式以上の項を無視すれば、それぞれ次式で近似できる。

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64} k^4 \dots \right) \doteq \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \quad (66)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 \dots \right) \doteq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) \quad (67)$$

式(66)、(67)を式(62)に代入すると次式を得る。ここでは再び k^4 以上の項を無視した。従って、 k^4 の項が k^2 の項に比較して無視できる(桁が異なる)範囲を若干変形が進んだ状態と定義し、 k が 0.3 以下の範囲で考えることとした。

$$l_0 = \pi \left(1 - \frac{3}{4} k^2 \right) \lambda(k) + \frac{2\pi \lambda^3(k) N_{cr}(k)}{K_B} k^2 \quad (68)$$

k について解くと、次式を得る。

$$k^2 = \frac{4K_B (l_0 - \pi \lambda(k))}{\pi \lambda(k) (8\lambda^2(k) N_{cr}(k) - 3K_B)} \quad (69)$$

水平変位を増大させたので、パラメータ k は必ず正の解を持つ。

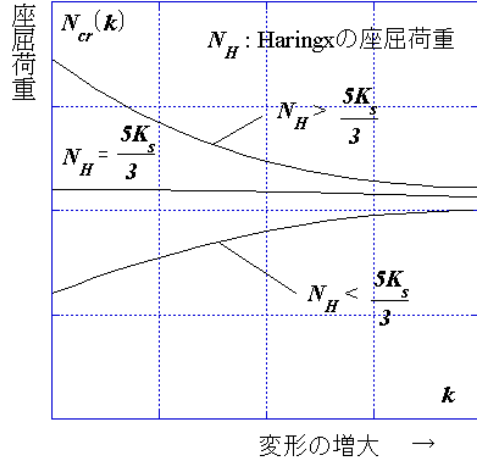


図5 変形 k の増大と座屈荷重 N_{cr} の変化

逆に考えると、次の場合分けが必ず成立する。

$$\begin{cases} 8\lambda^2 N_{cr} - 3K_B > 0 & \Leftrightarrow l_0 - \pi \lambda > 0 \\ 8\lambda^2 N_{cr} - 3K_B < 0 & \Leftrightarrow l_0 - \pi \lambda < 0 \end{cases} \quad (70)$$

ここで、式(51)を考慮すると式(70)は(71)式と等しい。

$$\begin{cases} N_H < \frac{5K_S}{3} & \Leftrightarrow \lambda(k) < \frac{l_0}{\pi} = \lambda_H \\ N_H > \frac{5K_S}{3} & \Leftrightarrow \lambda(k) > \frac{l_0}{\pi} = \lambda_H \end{cases} \quad (71)$$

従って、部材のせん断剛性 K_S がある程度高い場合、水平変位の増大に対して、基準部材長 $\lambda(k)$ は短くなる。つまり、座屈荷重は減少するのではなく、若干増加に転じる。逆にせん断剛性が低すぎると、水平変位の増大に対して座屈荷重は直ちに減少し始める。

式(71)の結果を、図5に模式的に示した。式(71)と図5を参照すれば、水平変位の増大に対して基準部材長 λ が増大しない、言い換えると、座屈荷重が安定に推移するための判定条件を求めることができる。

$$N_H < \frac{5K_S}{3} \quad (72)$$

式(72)は極めて意外な結果と言わざるを得ない。従来の免震用積層ゴム支承の開発方針は、より低いせん断剛性を持ち、より高い軸力を支持できる部材を追求する方向にあった。しかし、式(72)は高い軸力を支持し、低いせん断剛性を持つ部材は、水平変位の増大に対して座屈安定性が劣化することを示している。従って、材料のせん断弾性係数は、ある程度の絶対値が必要であり、際限なく低いせん断弾性係数の材料を開発したり、追求したりすることは、座屈安定性の観点からは控えるべきであることが理解できるのである。

以上のように、広く用いられている積層ゴム支承の座屈安定性について、従来の見解とは質的に異なる結果が導かれた。今後は、式(72)の妥当性を実験で再現することが必要である。この解析予想を検証することは、現在、危惧されている長周期地震に対する免震構造の安全性を検討するためにも、重要な課題である。

(4.4) 大変形領域：0.5 < k < 0.8

最後に終局的な場合を想定し、水平変位が非常に大きくなった場合について考察する。実は、水平変位がどれほど大きくなっても、部材長 $l(k)$ に対する水平変形 $\delta_H(k)$ の割合には最大値が存在する。式(52)と式(53)を参照して、水平変位と変形後の部材長の比率を母数 k の関数で表すと、式(73)を得る。図6にはグラフを示した。

$$\frac{\delta_H}{l} = \frac{2k}{K(k)} \quad (73)$$

図6からは、母数 k が0.80よりも大きくなると部材長が水平変形に対して極端に大きくなるのが分かる。このような変形状態を模式的に図示すると図7となる。従って、 k が0.8を超えるような変形は、避けなければならないことは、直ちに理解できる。

では、座屈荷重の低下を招かないためには、 k は如何なる範囲に留めるべきなのであろうか。図7から分かるように φ_{\max} が $\pi/2$ を超えるような大変形は危険である。対応する k の限界値は $\sqrt{2}/2$ であり、これを一つの目安とすることにした。このときの、水平変形の値を安定限界水平変位 δ_{cr} と定義することにする。積層ゴム支承の全高さ $h(k)$ は、水平変位の増大とともに減少する。従って、水平変位と全高さの比率を考えることで、安定限界水平変位 δ_{cr} の上限を定めることができる。式(53)、(54)より δ_{cr} の上限は次式で与えられる。

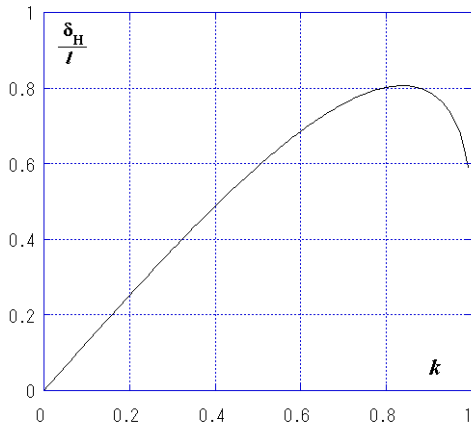


図6 母数の変化に対する部材長と水平変位の比率

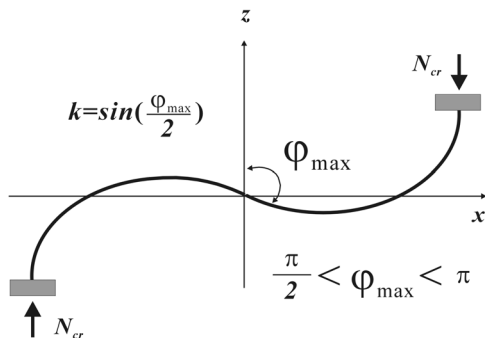


図7 安定限界変位を超えた変形とパラメータ k の関係

$$\delta_{cr} = \frac{2k h(k)}{2E(k) - K(k)} < \frac{\sqrt{2} l_0}{2E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 1.60l_0 \quad (74)$$

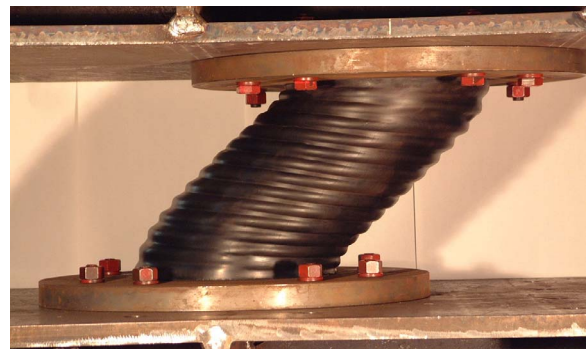
水平変位が式(74)を超えて変形するときは、材料剛性が硬化しない限り、座屈荷重の低下を避けることができない。一般的に用いられている免震構造用積層ゴム支承では、この点が全く考慮されていない。寧ろ、積層ゴム支承の全高さは、2次形状係数がある数値目標を満足する範囲で低めに抑えられてきた。既往研究では積層ゴム支承の直径のみに着目していたため、積層ゴム支承の絶対的な高さが、座屈安定性を確保するために必要な最小値に比べて少なすぎるように思われる。ただ、せん断剛性はひずみの増大により硬化するので、変形の増大に対する幾何学的な不安定性を、幾分補う効果があるものと推定できるので、今後は材料非線形が座屈安定性に与える効果を含めて総合的に評価することが必要である。

(4.5) 実験結果との比較

著者は中空積層ゴム支承を対象として、幾つかの実験研究を行ってきた。写真1には、水平変位200mm、鉛直軸力263KN、水平反力ゼロ、の場合の中空積層ゴムの変形状態を示す。試験体の諸元、実験方法、計測方法、材料定数の計測方法など、定量的な実験結果については文献4を参照されたい。ここでは、定性的な実験結果を、解析結果から考察することとする。

積層鋼板の厚みが十分にある場合は、Haringxの意味で平面保持が成立する(写真参照)。また、座屈荷重は実験誤差の範囲でHaringxの線形理論で予測できる⁽⁴⁾。水平変位が直径とほぼ等しい場合にも、座屈荷重の低下が殆ど見られないことが、実験によって確認された。こうした座屈後の安定性は、少なくとも解析的には存在することが示されたし、実験的にも現象を捉えることができた。おそらく、中空積層ゴムに限らず円形断面の積層ゴム支承でも条件さえ調べれば同様の現象を観測できるはずである。

本論文で解析的に示した結果は、既往の研究成果とは質的に異なる。既往の実験研究では試されていない断面形状やプロポーション、高めのせん断弾性係数の設定など、様々な要因が座屈安定性を向上させる可能性として残されていることを、本論文の解析予想は示しているのである。



水平変位 200mm 鉛直軸力 263 KN
写真1 中空積層ゴムの座屈後変形

5 結 語

本論文では、材料の線形性と積層鋼板の平面保持を前提とし、幾何学的な非線形性が積層ゴム支承の座屈安定性に与える影響について、解析的な考察を行った。その結果、幾つかの新しい知見と解析予想を得るに至った。

1. 線形の曲げ-せん断座屈モデル (Haringx モデル) を大変形領域に拡張した非線形座屈モデルを導いた。
2. 大きな水平変形状態における、座屈後の部材変形を楕円積分のグループによって表現することが可能となった。
3. 上記、拡張モデルを用いると、部材のせん断弾性係数の絶対値が座屈後の安定性を支配する重要な因子となっている可能性が予想される。
4. さらに、積層ゴム支承の高さ方向の絶対値が座屈後の安定性に大きな影響を与えている可能性が予想される。

上記の結果は、普通に使用されている免震構造用積層ゴム支承の多くが、水平変形に対する座屈安定性という基本的な条件を必ずしも十分に満足しているとは言い切れないことを示している。

一方、既往の実験研究では試されていない断面形状やプロポーション、材料定数の設定など、様々な要因が座屈後の安定性を向上させる可能性として残っていることも解析的には予想されるのである。

謝 辞

本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究(C)(2) (課題番号 14550583、木造家屋のための免震構造用積層ゴム支承の開発) より助成を受けたものでありここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 西村功、山田俊一、坂本光雄、近藤明洋、小堀鐸二：中空断面を有する積層ゴム支承の鉛直剛性に関する解析的研究、日本建築学会構造系論文集、第505号、pp. 61-68、1998年3月
- 2) 西村功、山田俊一、坂本光雄、近藤明洋、小堀鐸二：中空断面を有する積層ゴム支承の鉛直剛性に関する実験的研究、日本建築学会構造系論文集、第519号、pp. 143-150、1999年5月
- 3) 西村功：中空断面を有する積層ゴム支承の曲げ剛性に関する解析的研究、日本建築学会構造系論文集、第558号、pp. 149-156、2002年8月
- 4) 西村功、小木亜希子、今泉幸成：中空断面を有する積層ゴム支承の座屈荷重に関する実験、日本建築学会構造系論文集、第586号、pp. 79-86、2004年12月
- 5) Haringx, J. A. : On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings I, Phillips Research Report, Vol. 3, pp. 401-449, 1948
- 6) Haringx, J. A. : On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings II, Phillips Research Report, Vol. 4, pp. 49-80, 1949
- 7) Haringx, J. A. : On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings III, Phillips Research Report, Vol. 3, pp. 206-220, 1949
- 8) Buckle, I. G., Kelly, J. M. : Properties of Slender Elastomeric Isolation Bearings during Shake Table Studies of a Large-Scale Model Bridge Deck, Joint Sealing and Bearing Systems for Concrete Structures, ACI, vol. 1, pp. 247-269, 1986
- 9) Buckle, I. G., Liu, H. : Stability of elastomeric seismic isolation systems, Proc. of Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation and Control, ATC-17-1, Applied Technology Council, pp. 293-305, 1993
- 10) Gent, A. N. : Elastic Stability of Rubber Compression Springs, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 6, No. 4, pp. 318-326, 1964

[APPENDIX] Haringx Model

部材端部の境界条件は下式にて与えられる。(本文図2参照)

$$M_o = \frac{1}{2} N_o \delta_H + \frac{1}{2} h Q_o \quad (A-1)$$

部材中間点における曲げモーメントの釣り合いは、図3を参照して、式(A-2)となる。

$$M(z) = N_o x(z) + Q_o z \quad (A-2)$$

$$\frac{dM}{dz} = N_o \frac{dx}{dz} + Q_o \quad (A-3)$$

$$\frac{dx}{dz} = \theta(z) + \gamma(z) \quad (A-4)$$

$$Q(z) = Q_o + N_o \theta(z) \quad (A-5)$$

$$\gamma(z) = \frac{Q(z)}{K_S} \quad (A-6)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{M(z)}{K_B} \quad (A-7)$$

以上が、Haringx の曲げ-せん断モデルである。境界条件を考慮して、水平変位の解は(A-8)となる。

$$x(z) = \frac{M_o}{N_o} \frac{\sin(\omega_o z)}{\sin\left(\frac{\omega_o h}{2}\right)} - \frac{Q_o}{N_o} z \quad (A-8)$$

ここで、

$$\omega_o^2 = \frac{N_o}{K_B} \left(1 + \frac{N_o}{K_S} \right) \quad (A-9)$$

水平剛性を式(A-10)で定義すると、その値は式(A-11)で与えられる。

$$Q_o = K_E \delta_H \quad (A-10)$$

$$K_E = \frac{N_o^2}{2\omega_o K_B \tan\left(\frac{\omega_o h}{2}\right) - h N_o} \quad (A-11)$$

最後に座屈荷重を算定する。水平剛性が消失する鉛直軸力を座屈荷重と定義すると、その値は次式で与えられる。

$$\cos\left(\frac{\omega_o h}{2}\right) = 0 \quad (A-12)$$

結局、座屈荷重 N_H は、2次方程式の根のうち、プラス側の解で与えられる。この解は、本文の式(64)に等しい。

$$N_H^2 + K_S N_H - K_B K_S \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 = 0 \quad (A-13)$$