

## 積層ゴム支承の座屈荷重に与える幾何学的非線形の影響

THE EFFECT OF GEOMETRICAL NONLINEARITY  
ON THE BUCKLING LOAD OF LAMINATED RUBBER BEARINGS

西村 功

Isao Nishimura

This paper evaluates the effect of geometrical nonlinearity on the buckling load of laminated rubber bearings. In the past research, the author proposed a nonlinear buckling model for shear-bending columns, which revealed the fact that the reduction of lateral stiffness of rubber bearings in a large horizontal displacement depends on their configuration. It has been believed that the low-rise elastomeric columns have a more stable load-displacement characteristics than slender ones. The model, however, clarified the risk of the unstable post-buckling behavior latent in the flat configuration of bearings. On the other hand, the slenderness of elastomeric columns plays an important role to maintain their load supporting capacity in a large deformed area. These analytical discoveries are numerically investigated and compared with some experimental observations.

**Keywords:** buckling load, base isolation, Haringx model, geometrical nonlinearity, elliptic function

座屈荷重、免震構造、ハリリンクスモデル、幾何学的非線形、楕円関数

## 1 序 論

本論文は、免震構造用積層ゴム支承の座屈荷重に与える幾何学的非線形性について数値解析的な考察を行ったものである。

著者は、免震構造に用いられる積層ゴム支承の座屈安定性を向上させる目的で、中空孔を有する積層ゴム支承の鉛直剛性、曲げ剛性、などについて実験と解析の両面から検討を加えてきた<sup>(1)(2)(3)(4)</sup>。その結果、積層鋼板に比較的厚みのある材料を用いるとHaringxモデルで予想される座屈荷重がほぼ正確に実験で再現されることや、大きな変形を生じた後も、荷重-変形関係が高い線形性を示すことなどの実験結果を得た<sup>(4)</sup>。この結果は、一般的に知られている大変形後の円形断面積層ゴム支承の荷重-変形関係と大きな違いがある。そこで、両者の相違を解明することを目的として、変形の増大による座屈荷重の減少や水平剛性の低下を定量的に評価できる非線形座屈モデルについて考察し、特に、大変形後の安定性について大域的な検討を行った<sup>(5)</sup>。その結果、「材料の線形性を仮定すれば、座屈後に水平変形が増大しても座屈荷重が安定に推移する条件」が存在することを示し、大域的な安定性の判別条件式を明らかとした<sup>(5)</sup>。

積層ゴムの大变形領域における座屈挙動は、材料非線形と幾何学的非線形が複雑に絡み合った結果と考えられる。このうち、幾何学

的な非線形性については、理論的な研究によってその影響を把握することが可能である。一方、材料非線形は実験研究によって得られたデータから理論的に求められた幾何学的な非線形の影響を差し引くことによって、その影響を把握することが可能となる。本研究はこのような立場から、まず幾何学的な非線形性が積層ゴム支承の座屈荷重に与える影響について把握することを目的としている。

既に、大变形領域でも座屈荷重を保持することができる拘束条件の存在が予想されている<sup>(6)</sup>。これは、線形Haringxモデルの座屈荷重の定義を、自然な形で非線形領域に拡張したモデルから得られた結果であり、復元力が負とならない限り有効である。微小変形理論では、水平剛性の消失と水平荷重（反力）が消失することは同義であるから座屈荷重の定義としてはどちらを用いても同じである。しかし、幾何学的非線形領域では水平変位が重要なパラメータとなるので、座屈荷重の定義が重要となる。本論文では、文献 5 との連続性を考慮し、水平反力がゼロとなる鉛直荷重を座屈荷重と定義し、座屈が発生するときの水平変形を考察した。

以上の考察の結果、座屈荷重の大小と大变形領域における座屈安定性とは、全く異なる現象であることが明らかとなった。これが本論文の概要である。

## 2 幾何学的非線形性を考慮した曲げせん断座屈荷重の数値解析

積層ゴム支承の大変形領域まで解析することの可能な、幾何学的非線形性を考慮した曲げせん断座屈モデルを図1に示す<sup>(5)</sup>。このモデルの概要を以下に要約する。部材中央部からの部材長  $s$  を媒介変数として、反力と変形の釣り合い式を点  $P(x(s), z(s))$  について求めると式(1)を得る。

$$M(s) = N_o x(s) + Q_o z(s) \quad (1)$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin(\theta + \gamma) \quad (2)$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos(\theta + \gamma) \quad (3)$$

ここで、

- $s$  : 点Pを示す弧長媒介変数
- $\theta(s)$  : 曲げモーメントによるたわみ角
- $\gamma(s)$  : せん断力によるたわみ角
- $x(s)$  : 点Pの  $x$  座標
- $z(s)$  : 点Pの  $z$  座標
- $N(s)$  : 点Pの軸力
- $Q(s)$  : 点Pのせん断力
- $M(s)$  : 点Pの曲げモーメント
- $Q_o$  : 部材端せん断力
- $N_o$  : 部材端軸力
- $M_o$  : 部材端曲げモーメント
- $\delta_H$  : 荷重が作用した後の水平変位
- $h$  : 荷重が作用した後の部材高さ
- $l$  : 荷重が作用した後の部材長さ
- $l_o$  : 荷重が作用する前の部材長さ

鉛直軸力が座屈荷重近傍にあるとき、最終的な釣り合い式は非線形の微分方程式(4)となる。このとき、変形後の部材曲線のたわみ角  $\varphi(k, s)$  は、式(6)に示す楕円関数で与えられ、パラメータ  $k$  は式(7)を満足する(図3参照)。ここで、 $k$  は楕円関数の母数であり、変形の増大を表す指標と見なすことができる。

$$\frac{d^2 \varphi(k, s)}{ds^2} + \frac{1}{\lambda(k)^2} \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

$$\theta(k, s) + \gamma(k, s) = \varphi(k, s) \quad (5)$$

$$\sin\left(\frac{\varphi(s, k)}{2}\right) = k \operatorname{sn}\left(\frac{s}{\lambda(k)} + K(k)\right) \quad (6)$$

$$\sin \frac{\varphi_{\max}}{2} = k \quad (7)$$

ここで、 $K(k)$  : 第1種の完全楕円積分

このとき、座屈荷重は部材端部のせん断力  $Q_o$  が失われるときの軸力  $N_o$  と考えれば、式(8)で定義できる。文献5では、座屈荷重について大域的な傾向を考察したが、本論文では具体的な積層ゴム支承の座屈荷重  $N_{cr}$  を数値解析によって検討する。

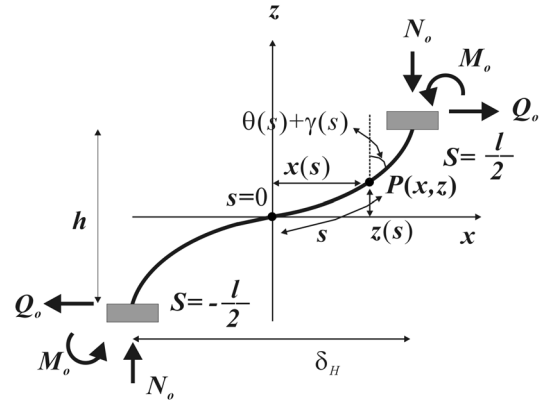


図1 幾何学的非線形性を考慮した曲げせん断モデル

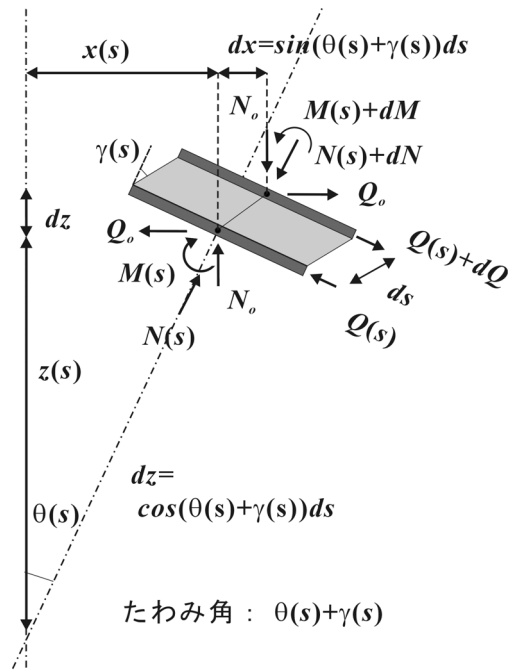


図2 局所的な釣り合い状態

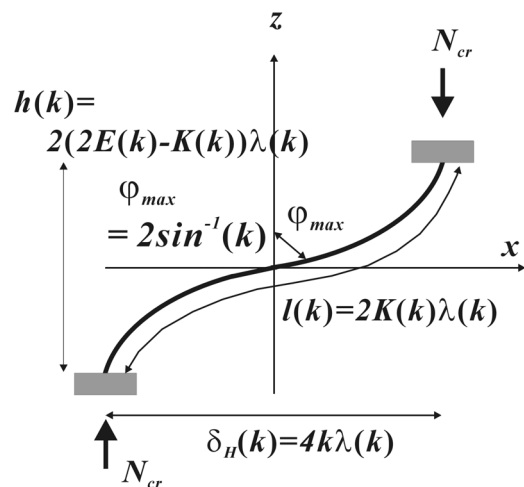


図3 座屈荷重近傍における部材変形を表す関数グループ

$$N_o = N_{cr} \quad Q_o = 0 \quad (8)$$

このとき、非線形微分方程式(4)に現れる $\lambda(k)$ は、式(9)で与えられる。当然、座屈荷重 $N_{cr}(k)$ もパラメータ $k$ の影響を受ける。

$$\frac{1}{\lambda^2(k)} = \frac{N_{cr}^2(k) + K_S N_{cr}(k)}{K_S K_B} \quad (9)$$

ここで、 $K_S$  : セン断剛性 ( $= G_e A$ )

$K_B$  : 曲げ剛性 ( $= E_e I$ )

変形後の部材長 $l(k)$ は、水平変形 $\delta_H(k)$ 、支承高さ $h(k)$ は、それぞれ式(10)、(11)、(12)で与えられる。

$$l(k) = 2K(k)\lambda(k) \quad (10)$$

$$\delta_H(k) = 4k\lambda(k) \quad (11)$$

$$h(k) = 2(2E(k) - K(k))\lambda(k) \quad (12)$$

ここで、 $E(k)$  : 第2種の完全楕円積分

部材の元の長さ $l_o$ は、変形後の形状から逆算して次式を満足しなければならない。式(13)は境界条件となる。

$$l_o = 2(2E(k) - K(k))\lambda(k) + \frac{8\lambda^3(k)N_{cr}(k)}{K_B} (E(k) + (k^2 - 1)K(k)) \quad (13)$$

結局、母数 $k$ は変形の増大を代表する数値であり、この値の変化に対して座屈荷重 $N_{cr}(k)$ の変動を解析すれば、変形の増大に対する座屈荷重の安定性を定量的に把握することができる。式(13)と式(9)から $\lambda(k)$ を消去すると式(14)を得る。母数 $k$ が与えられれば、式(14)からは $N_{cr}(k)$ の解を得ることができる。

$$l_o^2 \left( \frac{N_{cr}^2 + K_S N_{cr}}{K_S K_B} \right) = \left[ (4E(k) - 2K(k)) + \frac{8K_S}{N_{cr} + K_S} (E(k) + (k^2 - 1)K(k)) \right]^2 \quad (14)$$

式(14)は $N_{cr}(k)$ に関する4次方程式で、その係数は完全楕円積分を含み、元の部材長 $l_o$ 、セン断剛性 $K_S$ 、曲げ剛性 $K_B$ が与えられれば、解析できることを示している。文献5では方程式(14)の解を大域的に検討したが、本論文では数値解析的に考察する。

パラメータ $k$ の値をゼロから徐々に増加させながら、式(14)を数値解析的に解き、まず座屈荷重 $N_{cr}(k)$ を求める。次に、式(9)により基準部材長 $\lambda(k)$ を求める。最後に式(11)により、水平変位 $\delta_H(k)$ を求める。数値解析の実行にあたり、第1種と第2種の完全楕円積分は算術幾何平均により求め<sup>(13)</sup>、数列の繰り返し演算は10回で打ち切った。4次方程式の根はKerner法による数値解析で求めた<sup>(12)</sup>。

### 3 幾何学的非線形を考慮した水平剛性の数値解析

以上のように、座屈荷重を求めるためには、まず大変形後の釣り合い式を求めた後、次に部材の初期長さを満足する境界条件式を求め、両者を連立して解を求めなければならない。鉛直荷重が座屈荷重よりも小さいときには、水平反力 $Q_o$ が存在するが、これを求める際にも同様の計算が必要となる。

まず、セン断剛性 $K_S$ と曲げ剛性 $K_B$ を与え、適当な長さ $l_o$ とパラメータ $k$ を設定して座屈荷重 $N_{cr}(k)$ を求める。このとき、前節の方法によれば、水平変位 $\delta_H(k)$ と部材高さ $h(k)$ 、変形後の部材長さ $l(k)$ なども同時に求まる。このとき、任意の点Pの座標 $x(s)$ と $z(s)$ は図1と図4を参照し、式(15)、(16)にて与えられる<sup>(5)</sup>。

$$x(s) = -2k\lambda(k)cn \left( \frac{s}{\lambda(k)} + K(k) \right) \quad (15)$$

$$z(s) = 2 \int_0^s dn^2 \left( \frac{u}{\lambda(k)} + K(k) \right) du - s \quad (16)$$

点Pにおける水平変形 $\delta_H(s)$ と支承高さ $h(s)$ は座標軸を $\theta(s)$ だけ回転させたものに等しい。従って、式(17)によって与えられる。変形後の部材長さ $l(s)$ は勿論 $2s$ である。

$$\begin{pmatrix} \delta_H(s) \\ h(s) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \theta(s) & -\sin \theta(s) \\ \sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ z(s) \end{pmatrix} \quad (17)$$

また、点Pにおける曲げ変形は、次式で与えられる。

$$\theta(s) = \frac{2k\lambda(k)N_{cr}(k)}{K_B} \int_0^s cn \left( \frac{u}{\lambda(k)} + K(k) \right) du + \theta_{\max} \quad (18)$$

$$\theta_{\max} = \frac{\lambda^2 N_{cr}}{K_B} \varphi_{\max} = \frac{2\lambda^2 N_{cr}}{K_B} \sin^{-1}(k) \quad (19)$$

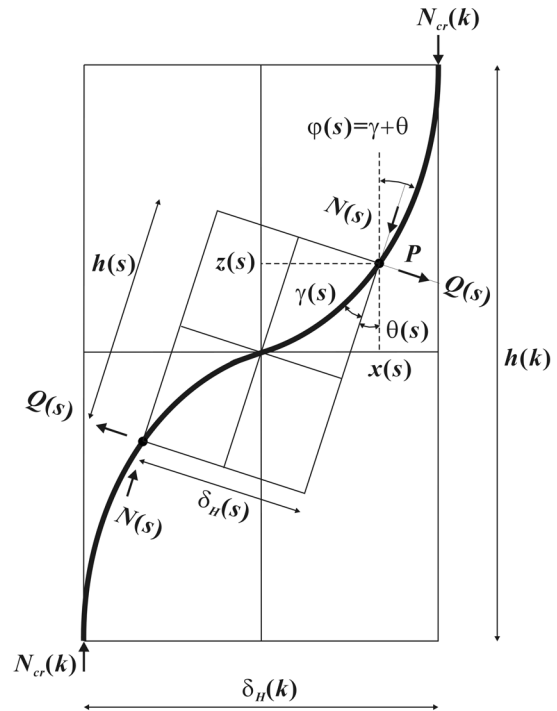


図4 座屈状態にある曲げせん断部材の任意点Pにおける釣り合い

一方、点 P におけるせん断変形、せん断力、軸力、曲げモーメントはそれぞれ式(20)、(21)、(22)、(23)で与えられる。

$$\gamma(s) = \frac{N_{cr}}{K_S} \theta(s) \quad (20)$$

$$Q(s) = N_{cr}(k) \sin \theta(s) \quad (21)$$

$$N(s) = N_{cr}(k) \cos \theta(s) \quad (22)$$

$$M(s) = -2k\lambda(k)N_{cr}(k)cn\left(\frac{s}{\lambda(k)} + K(k)\right) \quad (23)$$

さらに、荷重載荷前の点 P における  $l_o(s)$  は次式で与えられる。

$$\frac{l_o(s)}{2} = \int_0^s \cos \gamma(s) ds \quad (24)$$

式(24)に式(20)、(18)を代入すると  $l_o(s)$  を求めることができる。求めた  $l_o(s)$  が与えられた長さと同じになるときの  $s$  が式(24)の解となる。次に、改めて解  $s$  の値を式(17)、(21)に代入すると水平変形とせん断力が求まる。以上の計算を繰り返すと荷重変形曲線を求めることができる。

なお、水平剛性の算定のためには楕円関数を評価する必要がある。楕円関数は、 $dn$  関数を式(25)のフーリエ級数展開により求めた<sup>(14)</sup>。

最初の 300 項で計算を打ち切っている。

$$dn^2 s = \frac{E(k)}{K(k)} + \frac{\pi^2}{K^2(k)} \sum_{m=1}^{300} \frac{m \cos(m\pi s / K(k))}{\sinh(m\pi K(k') / K(k))} \quad (25)$$

$$\text{ここで、} \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (26)$$

## 4 数値解析例

### (4.1) 円形断面積層ゴム支承の荷重-変形曲線

ここでは、一般的な形状を持つ円形断面積層ゴム支承を対象として大変形領域における座屈荷重と水平剛性を定量的に評価した。まず、解析対象とした積層ゴム支承の外形を図 5 に示す。また、解析に用いた諸元を表 1 に示す。天然ゴム系の材料として、せん断弾性係数  $G$  を  $0.5 \text{ N/mm}^2$  と仮定し、ゴム層  $t$  と積層鋼板の厚み  $t_s$  を等しいと仮定すれば、積層ゴム支承全体としての有効せん断弾性係数  $G_e$  は  $1.0 \text{ N/mm}^2$  となる。このとき、積層ゴムの厚みを適宜選べば、曲げ剛性としての有効なヤング率  $E_e$  を  $1000 \text{ N/mm}^2$  に選定することは困難ではない。実際、ここで仮定した曲げ剛性を実現するために必要な積層ゴムの厚みは、約  $8 \text{ mm}$  程度となる。微小変形の Haringx モデルによれば、鉛直軸力が作用したときの水平剛性を式(27)と(28)から算定できる。

$$K_H = \frac{N_o^2}{2\omega_o K_B \tan\left(\frac{\omega_o l_o}{2}\right) - l_o N_o} \quad (27)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{N_o}{K_B} \left(1 + \frac{N_o}{K_S}\right)} \quad (28)$$

また、線形の座屈荷重  $N_H$  は水平剛性がゼロとなる場合の鉛直荷重として式(27)から求まる。結果を表 1 に示した。Haringx の線形理論から求められる結果は以上である。

本論文の第 2 節で示した数値解析法により、水平変形の増大に伴う、座屈荷重  $N_{cr}(k)$  の変動を解析した結果を表 2 に示す。大域的な安定性の考察からは、扁平で線形座屈荷重の高い積層ゴム支承は、水平変形の増大に対する座屈荷重の変動が著しいことが予想されていたが<sup>(5)</sup>、数値解析による定量的な考察によってもこのことが裏付

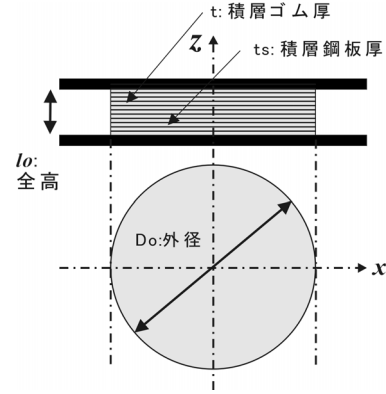


図 5 数値解析に用いた扁平な円形断面積層ゴム

表 1 数値解析に用いた積層ゴムの諸元

| 試験体の諸元                                | 数値                    |
|---------------------------------------|-----------------------|
| 直径: $D_o$ (mm)                        | 1000                  |
| 元の長さ: $l_o$ (mm)                      | 200                   |
| 断面積: $A$ (mm <sup>2</sup> )           | $7.85 \times 10^5$    |
| 断面 2 次モーメント: $I$ (mm <sup>4</sup> )   | $4.91 \times 10^{10}$ |
| 有効せん断弾性係数: $G_e$ (N/mm <sup>2</sup> ) | 1.0                   |
| 有効曲げヤング率: $E_e$ (N/mm <sup>2</sup> )  | 1000.0                |
| せん断剛性: $K_S$ (KN)                     | 785                   |
| 曲げ剛性: $K_B$ (KNmm <sup>2</sup> )      | $4.91 \times 10^{10}$ |
| 線形座屈荷重: $N_H$ (KN)                    | 97130                 |

表 2 計算例の座屈荷重と水平変位の関係

| $k$  | $N_{cr}(k)$<br>(KN) | $\lambda(k)$<br>(mm) | $\delta_H(k)$<br>(mm) | $h(k)$<br>(mm) |
|------|---------------------|----------------------|-----------------------|----------------|
| 0.0  | 97130               | 63.7                 | 0                     | 200            |
| 0.1  | 96420               | 64.1                 | 25.7                  | 200            |
| 0.2  | 94240               | 65.6                 | 52.5                  | 200            |
| 0.3  | 90500               | 68.3                 | 82                    | 200            |
| 0.4  | 85100               | 72.6                 | 116                   | 199            |
| 0.5  | 77700               | 79.5                 | 159                   | 199            |
| 0.6  | 67800               | 91.0                 | 218                   | 198            |
| 0.7  | 54800               | 112.5                | 315                   | 195            |
| 0.75 | 46600               | 131.9                | 395                   | 192            |
| 0.8  | 37100               | 165.7                | 530                   | 185            |

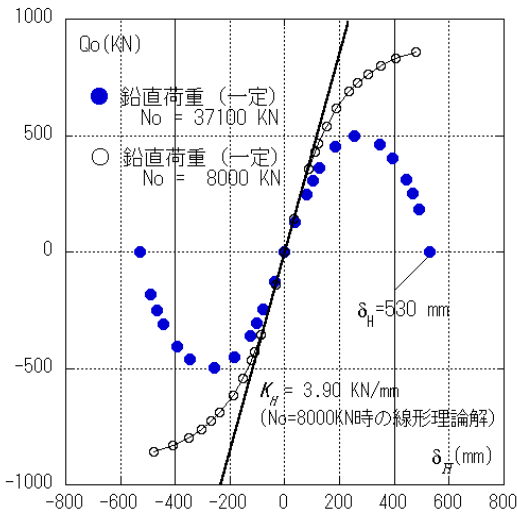


図6 幾何学的非線形性による水平剛性の低下

けられた。表2を見ると、例えば、軸力  $N_o$  が 37100kN の場合には、パラメータ  $k$  が 0.8 即ち、水平変形  $\delta_H$  が 530mm に達すると水平反力  $Q_o$  がゼロとなることが分かる (図6 参照)。

軸力  $N_o$  が小さい場合でも、水平変形が増大すると水平剛性の劣化が避けられない。例えば、 $N_o$  が 8000kN の場合について第3節で示した方法により解析すると、幾何学的な非線形性による水平剛性の劣化を定量的に計算することができる (図6 参照)。なお、図6には  $N_o$  が 37100kN の場合の計算結果も併記した。更に図6には、式(27)から求めた微小変形線形理論解による水平剛性を比較のために示した。実際の積層ゴム支承の挙動は、図6の結果に材料非線形の影響を加えたものになると予想される。しかし、幾何学的な非線形性を考慮しただけでも、実験的に知られている荷重-変形の非線形性を定性的に説明することは可能である。

#### (4.2) 中空積層ゴム支承の実験と解析の比較

著者は、長年に渡り中空断面を有する積層ゴム支承を対象として力学挙動を明らかにするための研究を行ってきた。その結果、中空断面を有する積層ゴム支承は、円形断面積層ゴム支承と比較して変形後の座屈荷重低下が少なく、かつ、大変形に対する水平剛性の低下も少ない、好ましい特性を有することが分かってきた<sup>(4)</sup>。

ごく最近になるまで、この現象は存在することさえ一般には知られていなかったため、中空断面を有する積層ゴム支承の大変形後の座屈安定性は疑問視されてきた。本節では、水平変形が増大に対する座屈荷重の変動を解析し、実験結果と比較検討する。

図7に示す中空積層ゴム支承は、著者が座屈実験に用いた試験体であり、実験方法などについては文献4で詳しく述べたのでここでは割愛する。座屈実験の際に測定した試験体の材料諸特性値と断面定数を表3に示す。この試験体では水平変位の増大に対する水平剛性の低下が少なく線形領域の広い優れた特性を有していることが実験によって確認されている。その一端を図8に示す。

実験では水平変位  $\delta_H$  を一定に保ち、鉛直軸力  $N_o$  を変化させながら水平反力  $Q_o$  を計測した。従って、水平反力  $Q_o$  が零となるとき軸力  $N_o$  は本論文における座屈荷重  $N_{cr}$  の定義(式(8))に一致する。

図8には、水平変位  $\delta_H$  をパラメータとしたときの反力 ( $N_o, Q_o$ ) の実験結果を示した。一方、第2節の解析方法によって計算した座屈荷重の変動を表4と表5に示す。実験値と解析値には2割から3割程度の開きがある。これら座屈荷重の値も図8に併記した。鉛直荷重が比較的大きく、せん断力が小さい場合には、加力装置の滑り支承部分の摩擦の影響を受けているものと推定される。更に第3節の方法によって計算した ( $N_o, Q_o$ ) の値を図8に併記した。

次に、軸力が座屈荷重以下の場合における荷重-変形の計測値と解析結果の比較を図9に示す。計算は第3節の方法に拠った。図9中には、線形理論による水平剛性の計算値も併記した。変形の増大による非線形性を考慮した解析値と実験結果は良く一致している。

では、何故、円形断面積層ゴム支承が不安定になる大変形領域でも、中空断面積層ゴム支承は座屈荷重が安定しているのだろうか。この理由を説明するために、変形の増大による座屈荷重の変化を大域的に考察した結果を以下に示す (文献5 参照)。

(I)  $k=0$  のとき：座屈荷重は線形座屈理論解 (Haringx の座屈荷重) と一致する。

$$N_{cr}(0) = N_H \quad (29)$$

(II)  $0 < k < 0.3$  のとき：水平変形の増大に対して、座屈荷重が安定に推移するか否かの判定条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} N_H \leq \frac{5}{3} K_S \Leftrightarrow N_H = N_{cr}(0) \leq N_{cr}(k) & (30-A) \\ N_H > \frac{5}{3} K_S \Leftrightarrow N_H = N_{cr}(0) > N_{cr}(k) & (30-B) \end{cases}$$

(III)  $k < 0.707$  のとき：水平変形の増大に対する、座屈荷重の急激な低下を招かないためには、水平変形の限界値  $\delta_{cr}$  は、式(31)の条件を満足する必要がある。

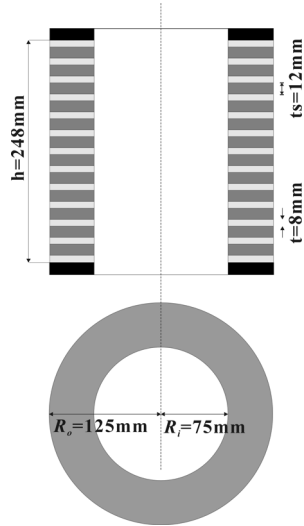
$$\delta_{cr} < 1.6l_o \quad (31)$$

(IV)  $0.707 < k < 0.908$  のとき：過大な水平変形に対しては、鉛直方向の変形も過大となり、安定性が損なわれる。図10の(IV)は、パラメータ  $k$  が 0.908 のときを示している。

表3 試験体の形状と物理定数 (測定値)

| 試験体の諸元                                | 数値                 |
|---------------------------------------|--------------------|
| 外径: $R_o$ (mm)                        | 250                |
| 内径: $R_i$ (mm)                        | 150                |
| 元の長さ: $l_o$ (mm)                      | 248                |
| 断面積: $A$ (mm <sup>2</sup> )           | $3.14 \times 10^4$ |
| 断面2次モーメント: $I$ (mm <sup>4</sup> )     | $1.67 \times 10^8$ |
| 有効せん断弾性係数: $G_e$ (N/mm <sup>2</sup> ) | 1.30               |
| 有効曲げヤング率: $E_e$ (N/mm <sup>2</sup> )  | 57.2               |
| せん断剛性: $K_S$ (KN)                     | 40.8               |
| 曲げ剛性: $K_B$ (KNmm <sup>2</sup> )      | $9.55 \times 10^6$ |

外径:  $R_o = 125$   
 内径:  $R_i = 75$   
 高さ:  $h = 248$   
 ゴム高さ:  $h_r = 104$   
 ゴム厚み:  $t = 8$   
 積層鋼板厚み:  $t_s = 12$



単位(mm)

図7 中空積層ゴム試験体 (T8-S12 試験体、文献4)

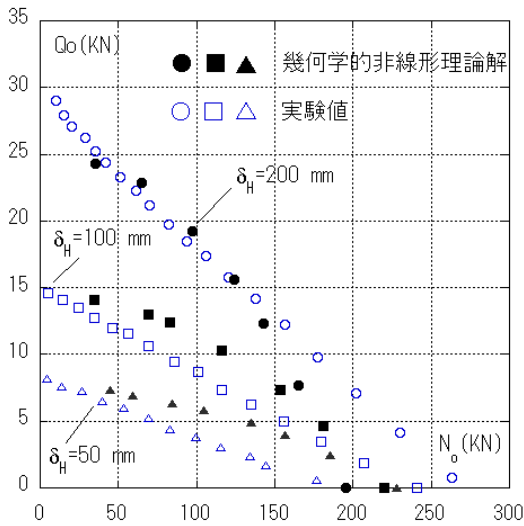


図8 鉛直軸力  $N_o$  とせん断力  $Q_o$  の関係

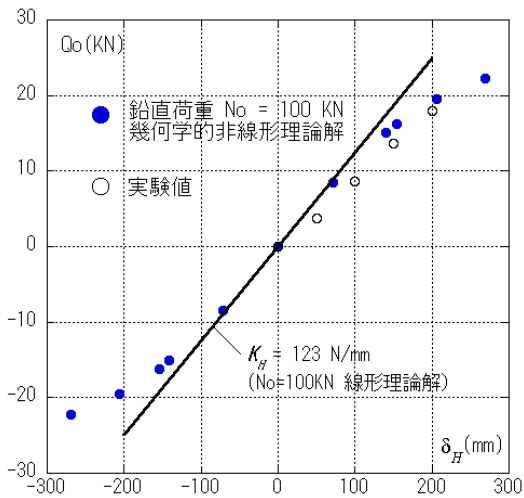
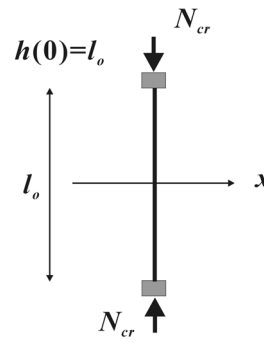
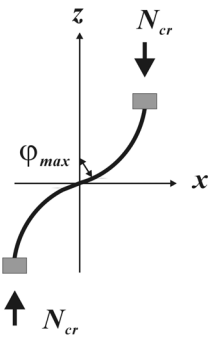


図9 T8-S12 試験体の実験結果と解析結果の比較  
(軸力  $N_o = 100\text{KN}$  一定時)

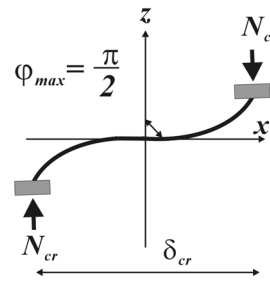
(I)  $k = 0$



(II)  $0 < k < 0.3$



(III)  $k = 0.707$



(IV)  $k = 0.908$

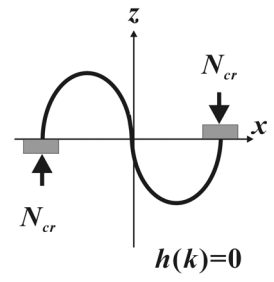


図10 パラメータ  $k$  と変形の増大

表4 座屈荷重の実験値と解析値の比較

| 水平変位 $\delta_H$ (mm) | 実験値 (KN) | 解析値 (KN) |
|----------------------|----------|----------|
| 線形理論解析値              | —        | 230.0    |
| 99mm                 | —        | 220.0    |
| 100mm                | 241.0    | —        |
| 136mm                | —        | 212.0    |
| 150mm                | 282.0    | —        |
| 179mm                | —        | 201.0    |
| 200mm                | 263.0    | —        |

表5 中空断面積層ゴム支承の大変形後の座屈荷重(解析値)

| $k$ | $N_{cr}(k)$ (KN) | $\lambda(k)$ (mm) | $\delta_H(k)$ (mm) | $h(k)$ (mm) |
|-----|------------------|-------------------|--------------------|-------------|
| 0.0 | 230              | 78.9              | 0                  | 248         |
| 0.1 | 229              | 79.3              | 32                 | 247         |
| 0.2 | 226              | 80.4              | 64                 | 245         |
| 0.3 | 220              | 82.3              | 99                 | 241         |
| 0.4 | 212              | 85.2              | 136                | 234         |
| 0.5 | 201              | 89.5              | 179                | 223         |
| 0.6 | 187              | 95.5              | 229                | 207         |
| 0.7 | 170              | 104               | 293                | 180         |
| 0.8 | 146              | 119               | 381                | 133         |

領域(II)の結果は、水平変形の増大に対する座屈荷重の変化が安定に推移する条件を示している。T8-S12 試験体における線形座屈荷重  $N_H$  は 230KN であり、せん断剛性  $K_S$  は 40.8KN である。両者の比比率は約 6 であり、条件式(30-A)を満足はしていないものの、比較的安定であると考えられる。

これに対し、(4.1)節の円形断面積層ゴム支承は、この比率が 120 倍を超えている。この値は、式(30-B)のかなり不安定側に解が存在することを示す。この解析予想と実験結果からは、線形座屈荷重の高いことと、大変形領域における安定性は、全く異なる条件で支配されていることが分かるのである。座屈荷重が高すぎる形状は、変形の増大に対する座屈荷重の低下が避けられない。既に見た 2 例からも分かるように、座屈荷重の変動と水平剛性の変動は関連しており、変形に対する座屈荷重変動の少ない積層ゴム支承(条件 30-A を満たす)は、水平剛性変動も少ないと考えられる。

### (4.3) 積層ゴム支承の座屈安定性に与えるプロポーシヨンの影響

式(31)から理解できるように、積層ゴム支承の高さが大変形後の安定性に与える影響は極めて大きい。この解析予想は、従来の免震構造用積層ゴム支承の常識と相反する結果であり、本節ではこの点を詳しく検討する。

まず、図 11 に示すような極めて細長い積層ゴム支承と断面形状が同じで高さ寸法のみ異なる比較用の形状を選び(表 6)、数値解析により座屈荷重を算定した。A タイプの計算結果を表 7 に示す。また、水平変位  $\delta_H$  の増大による座屈荷重  $N_{cr}$  の低下を、それぞれの計算例(A, B, C 各タイプ)ごとに示したものが図 12 である。座屈荷重と水平変位の計算は、第 3 節の方法に従った。図 12 を見ると、座屈荷重の高い積層ゴム支承は水平変形の増大に対して座屈荷重が急激に低下することが分かる。対照的に、座屈荷重の低い細長い積層ゴム試験体は、大変形後も座屈荷重の低下は少なく、安定していることが分かる。この結果は、式(30-A)の安定条件式の妥当性を具体的に示した例である。

A タイプの計算結果を見ると、水平変形の増大による座屈荷重の低下は殆ど見られない。しかし、鉛直方向の変形は大きく進展し図 10 に示す(III)の状態に近くなると、座屈荷重の低下は少ないものの鉛直方向への沈み込み量が增大し、鉛直荷重を支持する部材としての限界を超えるものと考えられる(表 7)。

A, B, C、各タイプの解析結果が示すように、プロポーシヨンの細長い形状が大変形後の座屈荷重を低下させることは無く、むしろ大変形後の座屈荷重を安定化する作用が著しい。特に A タイプは水平変形の増大にも関わらず、座屈荷重は広い範囲で一定値を示す(表 7 参照)。振り返って、(4.2)節の中空積層ゴム支承の解析結果を思い出せば、A タイプの水平剛性にも、高い線形性があるのではないかと推定できる。このことを確認するために、 $N_o = 20KN$  の場合の水平剛性を第 3 節の方法により計算した結果を図 13 に示す。予想通り、図 13 からは直径の 2 倍以上の変形が生じても鉛直荷重を安定に支持し、かつ、水平剛性の劣化が少ないことが分かる。

積層ゴム支承の不思議な力学挙動は、材料非線形と幾何学的非線形が複雑に融合した結果である。著者は、幾何学的な非線形性を考慮するだけで全てが説明できると主張しているわけでない。実際に実験によって観察される現象のうち、幾何学的な非線形の影響を除

けば、材料の非線形性を考察することが可能になると考えている。合理的に説明がつく現象を、できるだけ客観的に取り除くことで、材料非線形の影響も客観的に評価できるようになるであろう。これが、幾何学的非線形を考慮して積層ゴム支承の力学モデルを考察した動機である。しかし、(4.2)で見たように中空積層ゴム支承の場合には、幾何学的非線形を考慮するだけで、実験結果のかなりの部分を定性的かつ定量的に説明できることがわかった。

本研究の最終的な目標は、木造家屋を対象とした免震構造を安定な積層ゴム支承によって実現することにある。そのためには、スレンダーな形状を持つ A タイプ積層ゴム支承のように小型軽量で、極めて安定な性状を持つ積層ゴム支承を開発することが重要な課題である。

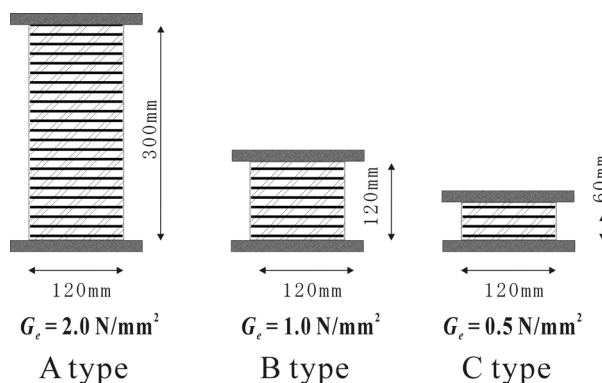


図 11 高さの異なる計算例

表 6 数値解析に用いた積層ゴム支承の諸元

| パラメータ                       | A タイプ              | B タイプ              | C タイプ              |
|-----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $D_o$ (mm)                  | 120                | 120                | 120                |
| $h = l_o$ (mm)              | 300                | 120                | 60                 |
| $A$ (mm <sup>2</sup> )      | $1.13 \times 10^4$ | $1.13 \times 10^4$ | $1.13 \times 10^4$ |
| $I$ (mm <sup>4</sup> )      | $1.02 \times 10^7$ | $1.02 \times 10^7$ | $1.02 \times 10^7$ |
| $G_e$ (N/mm <sup>2</sup> )  | 2.0                | 1.0                | 0.5                |
| $E_e$ (N/mm <sup>2</sup> )  | 100.0              | 100.0              | 100.0              |
| $K_S$ (KN)                  | 22.6               | 11.3               | 5.65               |
| $K_B$ (KN.mm <sup>2</sup> ) | $1.02 \times 10^6$ | $1.02 \times 10^6$ | $1.02 \times 10^6$ |
| $N_H$ (KN)                  | 40.1               | 83.3               | 122.7              |

表 7 水平変位と座屈荷重(A タイプ)

| $k$ | $N_{cr}(k)$<br>(KN) | $\lambda(k)$<br>(mm) | $\delta_H(k)$<br>(mm) | $h(k)$<br>(mm) |
|-----|---------------------|----------------------|-----------------------|----------------|
| 0.0 | 40.1                | 95.5                 | 0                     | 300            |
| 0.1 | 40.1                | 95.5                 | 38.2                  | 297.8          |
| 0.2 | 40.1                | 95.6                 | 76.5                  | 291.3          |
| 0.3 | 40.0                | 95.9                 | 115                   | 280.2          |
| 0.4 | 39.8                | 96.3                 | 154.0                 | 264.2          |
| 0.5 | 39.4                | 97.0                 | 194.1                 | 242.5          |
| 0.6 | 38.7                | 98.4                 | 236.2                 | 213.6          |
| 0.7 | 37.6                | 100.0                | 282.3                 | 174.5          |
| 0.8 | 35.6                | 105.3                | 337.0                 | 117.4          |

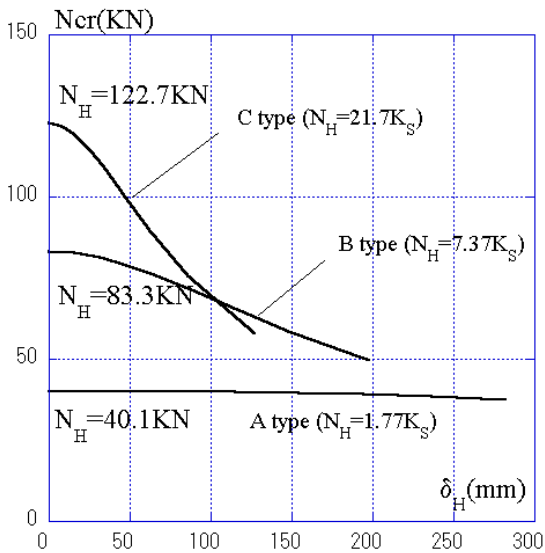


図 12 各タイプの水平変形の増大と座屈荷重の低下

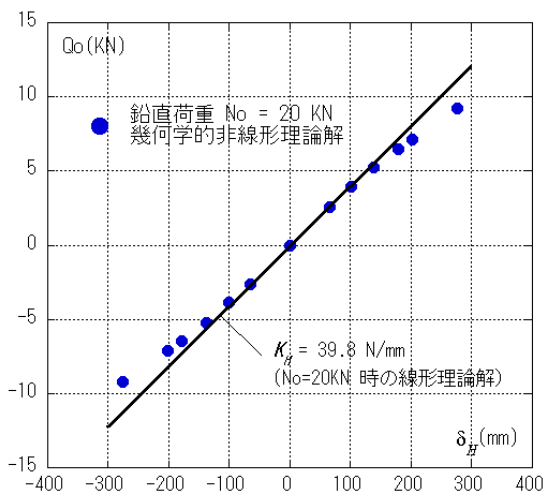


図 13 水平変形の増大と水平剛性変化の解析値  
(Aタイプ、軸力  $N_o = 20\text{KN}$  一定)

## 5 結 語

幾何学的な非線形性が、積層ゴム支承の座屈安定性に与える影響について、数値解析的な考察を行った。その結果、幾つかの新しい知見と解析予想を得るに至った。

1. 扁平な円形断面を有する一般的な積層ゴム支承の大変形後における座屈荷重の低下を定量的に評価した。
2. 中空断面を有する積層ゴム支承の大変形後における座屈荷重の低下を定量的に解析し、実験で確認された大变形後の座屈安定性を数値解析的に裏付けることができた。
3. 極めてプロポーシヨンの細長い積層ゴム支承について、その座屈安定性について数値解析を行い、軽量構造物の免震構造用積層ゴム支承としての可能性を検討した。
4. 下式の条件を満足する積層ゴム支承は、大变形領域においても線形性を保持することが可能である。

$$N_H = \frac{5}{3} K_S$$

本論文での解析検討の結果は、既往の研究成果とそれに基づく常識を覆すものである。従来、積層ゴム支承の高さ方向の値は、大きくなればなるほど座屈安定性を損なうと考えられてきた。そのため、積層ゴム支承の直径については多大な考慮が払われる一方、高さ方向の検討には、殆ど注意が払われ無かった。今後は、積層ゴム支承の高さ方向をパラメータとした実験研究の促進が望まれる。また、現在多用されている免震構造用積層ゴム支承のせん断弾性係数  $G$  は、設計に用いられている面圧  $\sigma$  に比較して、極端に小さいのではないかと危惧される。せん断弾性係数を大きくして、プロポーシヨンを工夫することにより、より安全な免震構造を実現できる可能性が示された。今後とも、実験的な検証を積み重ねることにより、部材の安全性を向上させる取り組みが重要である。

## 謝 辞

本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究(C)(2)(課題番号 14550583、木造家屋のための免震構造用積層ゴム支承の開発)より助成を受けたものでありここに記して謝意を表す。

## 参考文献

- 1) 西村功、山田俊一、坂本光雄、近藤明洋、小堀鐸二：中空断面を有する積層ゴム支承の鉛直剛性に関する解析的研究、日本建築学会構造系論文集、第 505 号、pp. 61~68、1998. 3
- 2) 西村功、山田俊一、坂本光雄、近藤明洋、小堀鐸二：中空断面を有する積層ゴム支承の鉛直剛性に関する実験的研究、日本建築学会構造系論文集、第 519 号、pp. 143~150、1999. 5
- 3) 西村功：中空断面を有する積層ゴム支承の曲げ剛性に関する解析的研究、日本建築学会構造系論文集、第 558 号、pp. 149~156、2002. 8
- 4) 西村功、小木亜希子、今泉幸成：中空断面を有する積層ゴム支承の座屈荷重に関する実験的研究、日本建築学会構造系論文集、第 586 号、pp. 79~86、2004. 12
- 5) 西村功：幾何学的非線形を考慮した曲げせん断部材の座屈後挙動(積層ゴム支承の座屈問題への適用)、日本建築学会構造系論文集、第 593 号 pp. 65~72、2005. 7
- 6) Haringx, J. A. : On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings I” Phillips Research Report, Vol. 3, pp. 401~449, 1948
- 7) Haringx, J. A. : On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings II” Phillips Research Report, Vol. 4, pp. 49~80, 1949
- 8) Haringx, J. A. : On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and Their Application for Vibration-Free Mountings III” Phillips Research Report, Vol. 3, pp. 206~220, 1949
- 9) Buckle, I. G., Kelly, J. M. : Properties of Slender Elastomeric Isolation Bearings during Shake Table Studies of a Large-Scale Model Bridge Deck, ” Joint Sealing and Bearing Systems for Concrete Structures, ACI, vol. 1, pp. 247~269, 1986
- 10) Buckle, I. G., Liu, H. : Stability of elastomeric seismic isolation systems, Proc. of Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation and Control, ATC-17-1, Applied Technology Council pp. 293~305, 1993
- 11) Gent, A. N. : Elastic Stability of Rubber Compression Springs, ” Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 6, No. 4, pp. 318~326, 1964
- 12) 一松 信：数値解析、新数学講座 13、朝倉書店、1982
- 13) 梅村 浩：楕円関数論、東京大学出版会、2000
- 14) 戸田盛和：楕円関数入門、日本評論社、2001